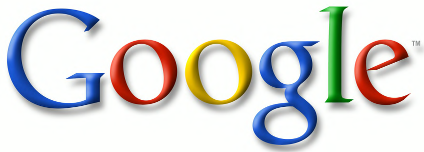
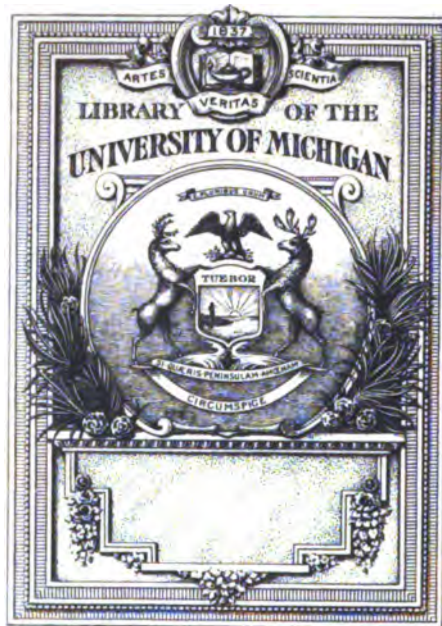


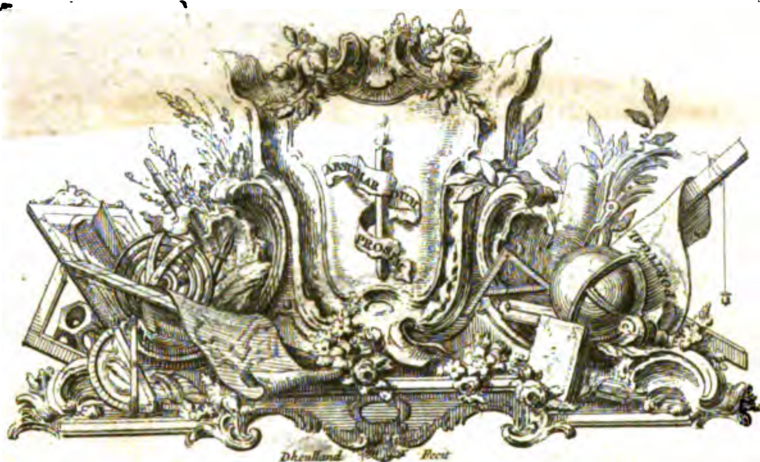

ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

ESSAIS
SUR
LES MATHÉMATIQUES,

Expliqués & démontrés par M. Jean DIGARD de Kerguette, 1717-1780.
dans ses Conférences publiques.

PREMIER ESSAI
CONTENANT
LE CALCUL,

*Dédié à S. A. S. Monseigneur le Comte d'*EU.



A PARIS,
Chez BALLARD seul Imprimeur du Roi pour la Musique, & Noteur de la Chapelle de Sa Majesté, rue S. Jean de Beauvais, à Sainte Cécile.

M D C C L I I.
Avec Approbation & Privilége du Roi.



A SON ALTESSE SÉRÉNISSIME

MONSEIGNEUR

LE COMTE D'EU,

Grand-Maître de l'Artillerie de France, &c.



ONSEIGNEUR,

En vous consacrant ces prémices de ma plume, je n'entreprendrai point de publier les vertus & les qualités éminentes qu'on admire en VOTRE ALTESSE SÉRÉNISSIME. *Quand je réussirois selon mes vœux, votre modestie rendroit*

mes succès superflus. Cependant *quoique vous prescriviez les bornes les plus étroites aux éloges les moins suspects, on sait,* MONSEIGNEUR, *qu'à la tête d'un* Corps *brillant & distingué, vous faites une estime particuliére des* Officiers *qui possédent la* Science *à laquelle je m'applique; & quelque glorieux qu'il me soit d'avoir mérité le suffrage de la premiere* Compagnie *du monde savant, je prétens moins vous offrir un hommage digne de* VOTRE ALTESSE SÉRÉNISSIME, *que rendre un témoignage public du profond respect avec lequel je suis,*

MONSEIGNEUR,

DE VOTRE ALTESSE SÉRÉNISSIME,

Le très-humble & très-obéissant
Serviteur Digard



PRÉFACE.



QUOIQU'IL ait déja paru beaucoup de Traités sur les Mathématiques, j'ai crû pouvoir encore faciliter une Etude aussi importante qu'inépuisable. Si mes Essais ne sont pas brillans, j'espere qu'ils seront utiles.

Il n'en est pas des Principes Mathématiques comme de ceux ausquels on veut asservir un Auteur qui doit tout puiser dans son propre fonds. Dans une Science où l'on ne peut faire de progrès qu'au moïen d'un travail assidu, où les découvertes même les plus brillantes sont la récompense d'une Etude opiniâtre, aussi bien que le prix d'un effort de génie : où enfin on ne s'avance (pour ainsi dire) que la regle & le compas à la main; on ne peut trop recommander l'Etude souvent négligée des Elémens. C'est pourquoi j'ai pensé qu'un ordre nouveau, plusieurs idées que je crois également neuves, quelques principes rendus plus simples & plus généraux, pourroient en applanir les difficultés.

L'esprit humain né libre & peut-être rebelle, ne souffre de Maîtres qu'à regret. Impatient de tout joug, honteux d'avoüer ses foiblesses, il ne se plie qu'avec peine aux préceptes d'autrui. Il faut donc lui trouver un guide ingénieux qui n'affecte point l'air de Maître; qui réforme ses idées sans le révolter; qui, par des principes aussi clairs que certains, le conduise à des conséquences inévitables, & le trompe enfin au profit de sa raison. L'enchaînement des Principes Mathématiques est pour nous ce Mentor habile que nous ne trouverions pas dans les seuls charmes de la vérité.

Que le ſimple nous conduiſe au compoſé par une gradation inſenſible. Que chaque maxime amenée par la précédente en ſoit une ſuite néceſſaire, & devienne la ſource de celle qui la ſuit. Que des Elémens, en un mot, s'offrent à nous comme un arbre généalogique. La propoſition la plus élevée ne nous étonnera point, parce que nous l'aurons prévue. Nous croirons même partager avec les plus grands hommes le mérite de leurs découvertes les plus précieuſes. Enfin, l'évidence nous perſuade, la ſublimité nous tranſporte, mais l'ordre nous invite. L'attrait inſurmontable qu'on trouve aux bons ouvrages en ce genre fournit à cet égard la preuve la plus complette. Mais en même tems ces chefs-d'œuvre de l'art, bien loin d'être à la portée de tout le monde, ne peuvent la plupart être entendus que par ceux qui ſe ſont déja initiés dans ces Sciences aux riſques de l'ennui qu'ils ont eſſuïé dans une foule d'ouvrages médiocres, & du travail immenſe que des préceptes mal digérés ont dû leur occaſionner.

En effet parmi les plus célebres Auteurs qui ont travaillé ſur cette matiere, les uns déterminés par des circonſtances particulieres, n'ont donné que ce qui étoit relatif à leur but principal, & ſont par conſéquent reſtés fort au-deſſous de ce qu'ils auroient pû faire. Les autres ſatisfaits d'avoir découvert & développé ce que ces Sciences ont de plus abſtrait & de plus profond, ont preſque tous ſuppoſé la connoiſſance des Principes Elémentaires. De-là vient que leurs Ecrits, objet du plus vif empreſſement des Savans, ne peuvent être qu'admirés par ceux qui ſont privés de ces connoiſſances. Des Commençans que le travail effraie, ne manquent pas de s'effaroucher, ſouvent même de ſe rebuter à l'inſpection d'une définition qu'ils trouveront abſtraite, d'une propoſition dont l'intelligence exigera quelque attention de leur part, d'une conſéquence qu'ils ne croiront pas immédiate, d'une opération qui leur paroîtra peu détaillée, d'une démonſtration qui les convaincra ſans les éclairer.

Bien au-deſſous de ces illuſtres Ecrivains, je ne forme point le deſſein de les égaler. Mon projet moins vaſte, plus meſuré, plus utile eſt de multiplier leurs partiſans, d'étendre l'empire de la vérité. Pénétré de l'excellence des modeles que nous avons ſur les parties les plus importantes des Mathématiques, je

je n'ai d'autre objet que de conduire mes Lecteurs à ces sources toujours abondantes du vrai, du grand, du solide, & de les mettre en état d'y puiser eux-mêmes. Heureux si je réussis à leur en inspirer le désir.

Dans cette vue je me suis fixé aux parties élémentaires. Je me suis proposé de les rendre intelligibles à tout lecteur attentif sans connoissances préliminaires & sans secours étrangers. Après une introduction sommaire, je commence par le Calcul. J'entre dans les derniers détails au sujet des opérations du premier dégré sur les grandeurs entiéres soit arithmétiques soit algébriques; & je ne supprime dans la suite ces détails qu'à mesure qu'ils deviennent inutiles & que le lecteur, muni de ce qui précede, est en état d'y suppléer. De-là passant aux opérations de même nature sur les quantités rompues, j'en fais l'application sur toutes sortes de fractions. Ensuite examinant comment se composent les puissances, j'en tire le principe de l'extraction des racines, & les différens moïens d'approcher des racines impossibles des puissances imparfaites; ce qui me conduit naturellement au calcul des radicaux, & celui des puissancés par leurs exposans termine ce premier volume.

La résolution des équations composera le second volume. Toute équation peut donner une proportion. Reciproquement toute proportion fournit une équation. L'Analogie & l'Analyse ont donc ensemble un rapport trop intime pour que je doive les séparer. Je traiterai conjointement de ces deux sciences sans les confondre. On les trouvera réduites aux principes les plus simples, & cependant j'y fais entrer tout ce qui est nécessaire pour entendre les ouvrages les plus sublimes que nous aïons sur cetre matiere.

Les propriétés de la ligne droite, du cercle & de ce qui en est composé, c'est-à-dire la Géometrie élémentaire théorique & pratique, la Trigonométrie rectiligne, la Géodesie & le Nivellement seront dans le troisieme volume. J'ai tâché de rendre cette partie interessante par l'enchainement, & la clarté des principes & par les applications que j'y joins autant qu'il est possible.

Enfin dans le quatriéme volume nous expliquerons la Méchanique tant des corps solides que des corps liquides. Nous y examinerons d'abord les loix du mouvement, de la projection

& de la percussion des corps solides, c'est-à-dire la Dynamique, la Ballistique & le choc des corps à ressort & sans ressort. De-là nous passerons aux principes de l'équilibre, nous examinerons dans la Statique la construction & l'usage des machines simples & composées. La seconde partie comprendra l'Hydraulique & l'Hydrostatique. Nous y développerons les principes du mouvement & ceux de l'équilibre des corps fluides.

Il me reste à parler du Stile. On ne s'attend pas sans doute à le trouver fleuri. On a raison. Cependant j'ai tâché de rendre mes Essais lisibles par l'uniformité de la méthode, la clarté & la pureté de la diction. Ce sont ordinairement les seules qualités qu'on désire & qu'on doive désirer dans les sujets que je traite. Encore ne s'y rencontrent-elles pas toujours. Le savant Tribunal aux lumiéres duquel je me suis soumis, a jugé que j'avois rempli mon projet. J'ai donc lieu d'esperer que le public sera satisfait à cet égard. En effet les figures de Rhétorique sont destinées à émouvoir l'ame. Par conséquent elles ne simpatisent point avec des principes qui exigent de notre part une entiere & tranquille application. La matiere est par elle-même trop importante pour nous permettre de partager notre attention entre le corps & le vêtement. On ne pare de fleurs que les mets délicats. Ces ornemens étrangers sont incompatibles avec les viandes solides. Sans altérer l'ordre, sans m'écarter de l'exactitude, la simplicité fait le principal objet de cet ouvrage. Plus curieux d'éclairer que d'éblouïr, j'ai immolé, ou au moins je me suis proposé d'immoler par tout l'amour propre de l'auteur à l'utilité du lecteur.

Guidé par de pareils motifs, je devrois peut-être ne point vanter l'utilité des Mathématiques. Leur mérite est assez généralement reconnu, je le sais. D'ailleurs ceux qui liront mes Essais seront d'avance persuadés de l'importance des sujets qui y sont traités; & s'il est quelqu'un qui regarde cette matiere comme peu intéressante, je ne dois pas présumer qu'il choisisse mes Elémens pour se détromper. J'en conviens également. Cependant par un usage bon ou mauvais, il semble qu'on ne puisse faire une préface sans y préconiser le sujet qu'on a choisi. Peut-être aussi le but de cet usage est-il de faire retomber sur le panégiriste une partie des louanges qu'il prodigue à

l'objet du panégirique. On eſt rarement modeſte en faiſant l'éloge de ce qu'on aime. On eſt encore plus rarement déſintéreſſé. Uſons donc du privilége & tâchons de n'en pas abuſer.

Les Mathématiques ſont utiles à tout homme en particulier. Nous leur devons la naiſſance & le progrés des arts. Elles ſont la défenſe & la ſureté des empires les plus puiſſans. Les avantages qu'on en retire ſont de tous les tems & de tous les lieux. Qu'on nomme, s'il eſt poſſible, quelque art, quelque ſcience digne de porter ce nom, qui ne leur ſoit redevable d'aucun ſecours. Je dis plus. Qu'on examine depuis le courtiſan juſqu'au laboureur. Qu'on paſſe du cabinet du politique à l'attelier de l'artiſan, on connoîtra que de tous les différens états, il n'en eſt point qui ne ſoit aidé par les Mathématiques, ou qui ne gagnât à l'être.

Mais un intérêt bien plus grand doit nous porter à les cultiver. Oublions, s'il ſe peut, toutes les commodités qu'elles nous procurent ſoit en ſatisfaiſant nos goûts, ſoit en prévenant nos beſoins. Si la reconnoiſſance eſt pour nous un fardeau trop peſant, oublions encore que nous ne pourrions ſans leur ſecours braver les injures de l'air, accroître notre fortune, aſſurer notre repos; leur prix n'en ſera pas moins grand. Notre eſprit, ce raïon émané de la Divinité, cette portion la plus noble de nous-mêmes n'appercevant les objets qu'à travers d'organes plus ou moins bien conformés, n'eſt que trop ſouvent ſuſceptible des impreſſions les plus fauſſes & des illuſions les plus groſſieres, ſi nous ne l'aſſujetiſſons à des préceptes qui reglent ſa marche & qui déterminent tous ſes mouvemens.

En effet un même principe nous conduit tous. Nous évaluons du plus au moins, nous comparons, nous combinons, nous meſurons, nous comptons, nous peſons, (pour ainſi dire) toutes nos démarches. Nous calculons les avantages & les inconvéniens qui peuvent réſulter de chacune. Cette comparaiſon ſeule nous engage dans une entrepriſe, ou nous la fait abandonner ſelon que nous la jugeons plus ou moins favorable. Sans cet exameu préliminaire, nous reſſemblons à des pilotes imprudens qui vogueroient au hazard ſans gouvernail, ſans bouſſole, & qui par conſéquent ſeroient expoſés à toutes ſortes de dangers. Or quel guide plus ſûr dans ces opérations de notre eſprit que la ſcience de la grandeur? C'eſt-à-dire, que l'art de

calculer, de comparer, de combiner, de mésurer, de peser? La Science des Mathématiques est donc sans contredit la plus capable d'éclairer & de diriger notre raison, de la délivrer des préjugés honteux qui l'obscurcissent. C'est cette science sublime, ou (comme les Anciens l'ont nommée) cette science par excellence qui rend à l'esprit toute la justesse & toute l'étendue dont il est capable. Le Géometre lui doit cette heureuse facilité de distinguer le vrai du faux, cette sagacité de jugement, cette aptitude à tout qui le caractérisent. C'est elle qui lui fournit les moïens de convaincre le plus outré Pyrrhonien par les argumens les plus forts, les plus vifs, les plus concis. C'est elle qui lui donne cette méthode claire & précise de découvrir la vérité; de l'exposer, de la faire connoître aux autres. C'est elle enfin qui nous rapproche de notre Auteur en ranimant en nous ce goût de la vérité, qui fait le plus noble appanage de l'homme & qui devroit être l'objet de tous nos soins.



AVERTISSEMENT.

QU'ON n'ait aucune idée des Mathématiques, & que sans aucun secours on lise un traité d'Elemens : il est fort rare qu'on l'entende. Qu'arrive-t-il de-là ? On s'en prend à l'obscurité de l'ouvrage, ou l'on croit manquer de dispositions. Ce dernier parti même est le plus ordinaire. C'est en fait de Mathématiques seulement que ce lecteur, si redoutable en tout autre genre, s'humilie au point de partager avec l'auteur, ou de s'attribuer à soi-même un défaut d'intelligence que dans toute autre matiere il rejetteroit tout entier sur l'écrivain. Quelle modestie ! Oserois-je dire qu'il y a encore plus de négligence ?

On a entendu dire que cette science étoit aussi difficile qu'abstraite, aussi épineuse que sublime. On aime mieux avoüer son incapacité que de prendre la peine de se détromper. *Tout le monde*, dit-on, *n'est pas né pour être Géometre. La Nature m'a refusé les talens nécessaires pour le devenir, puisque je n'entens pas un ouvrage si généralement admiré. Je perdrois mon tems à l'étudier, je ferai mieux d'y renoncer.* En effet il n'y auroit point de meilleur parti pour quiconque seroit incapable de refléchir. Mais je suis bien éloigné de croire aucun de mes lecteurs dans ce cas. La réflexion est aussi naturelle à l'homme que la parole. Tout homme qui n'est pas absolument privé de jugement trouvera en lui la faculté de réfléchir dès qu'il voudra l'exercer. L'homme fait pour la vérité doit s'efforcer de la découvrir, & puisque la méthode Géométrique est la plus sure & la plus courte, il lui est important de la connoître.

Mais on n'y réussira jamais si on veut lire un traité de Mathématiques comme on liroit une piéce d'éloquence ou un morceau d'histoire. Quelque clarté que j'aïe tâché de répandre dans ces Essais, (Qu'il me soit permis de le dire d'après les meilleurs auteurs) on ne les entendra qu'en les lisant la plume à la main ; c'est-à-dire qu'autant qu'on prendra la peine de faire tous les calculs, de se donner à soi-même des exemples auxquels on appliquera les pratiques indiquées, de se rendre

les démonstrations familieres, de méditer, de réfléchir & de ne passer jamais à quelque article que ce soit, sans avoir une parfaite intelligence de tout ce qui le précéde. C'est le seul moïen de lire avec fruit des ouvrages de cette nature.

Pour éviter les répétitions autant qu'il est possible, j'ai suivi l'usage de numeroter à la marge tout ce qui est de quelque importance. J'ai même abregé les citations en suivant le même ordre de numeros depuis le commencement jusqu'à la fin de l'ouvrage : ensorte que le second volume commence au numero qui suit immédiatement le dernier du premier volume. Ainsi quand on trouvera dans une parenthése un nombre tel que (26) ce renvoi signifiera que l'on doit se rappeller la proposition du numero 26.



DISCOURS

DISCOURS

SUR LA FACILITÉ ET L'UTILITÉ DES MATHÉMATIQUES,

Prononcé par M. DIGARD *à l'Ouverture de ses Conférences publiques.*



DISCOURS
SUR LA FACILITÉ ET L'UTILITÉ DES
MATHÉMATIQUES.



MESSIEURS,

L'ESPOIR de votre indulgence & les bontés dont veulent bien m'honorer des Protecteurs illustres, m'ont fait concevoir le projet moins généreux peut être que téméraire de servir mon siécle & ma Patrie. Animé par le suffrage d'un Corps également respectable & savant, j'ose essaïer de combattre un préjugé aussi contraire à la vérité que nuisible au progrès des Sciences.

J'entreprens d'anéantir le prétexte qui détourne la plûpart des hommes de l'Etude des Mathématiques, je me propose de détruire la prévention des immenses difficultés qui s'y rencontrent. Ebloui par la noblesse de l'objet, j'ai pu me flatter envain de

réussir ; mais au moins j'aurai la gloire d'avoir prouvé mon zele ; & si j'ai le malheur de succomber, j'espere que votre équité fera grace aux défauts de l'exécution en faveur du motif de l'entreprise.

Ce projet sembleroit devoir être annoncé par un Discours préliminaire aussi sublime que les Sciences qu'embrasse le Cours dont nous faisons aujourd'hui l'ouverture. En effet, quel vaste champ pour ces Génies heureux capables de parler des grandes choses avec la majesté qui leur convient ! Mais je me connois & je modere mon essor. Que serviroient au surplus la pompe & les agrémens du stile dans les matiéres que je dois traiter ? Ceux qui connoissent déja les Mathématiques ont-ils besoin que je leur rappelle ce qu'elles inspirent de grand ? Ils le sentent assez sans doute. Est-il nécessaire d'éblouïr ceux qui se proposent de les apprendre ? Loin de chercher à les étonner par une pompeuse déclamation, je dois seulement les encourager & leur exposer d'une maniere simple des vérités dont ils aimeront à découvrir eux-mêmes l'importance. Avec plus de capacité j'aurois eu la même retenue, j'aurois sacrifié par zele des ornemens que je supprime par amour propre.

S'il est avantageux que la vérité ne soit point ensevelie sous des parures étrangeres, il n'est pas moins utile qu'elle soit offerte avec tous ses charmes, qu'elle soit présentée dans son plus beau jour. Que ne puis-je, MESSIEURS, remplacer à votre égard cet aimable Philosophe que nous avons vû joindre si parfaitement les graces de l'éloquence à la solidité du raisonnement ! Que ne puis-je, comme lui, semer de fleurs le sentier trop peu connu de la vérité ! Mes soins seroient plus efficaces, leur succès moins douteux, & mes travaux plus dignes de vous ; mais puisque tous mes vœux à ce sujet seroient superflus, excité par les mêmes motifs, sans être pourvû des mêmes talens ; je me contenterai, dans le Cours que j'entreprens, d'exposer avec ordre, de développer avec soin les principes de la plus facile & peut être de la plus importante de toutes les sciences humaines.

Déja je m'imagine entendre quelques-uns de mes Auditeurs se récrier contre un tel début, & traiter d'absurde une proposition contraire à l'opinion commune. *On sait bien*, disent-ils, *que les Mathématiques ont quelque utilité : mais rien n'est plus singulier que de nous annoncer comme aisée une étude que de tout tems on a re-*

connue pour la plus difficile & qu'on a regardée comme le dernier effort de l'esprit humain. Personne n'ignore que l'Algebre est effraïante, la sécheresse de la Géométrie est passée en proverbe. Il n'est point de science plus compliquée que la Mécanique. Quelle ardeur, quelledispositions ne faut-il pas pour franchir tous ces obstacles! Après cela, n'est-ce pas s'aveugler que de prétendre que cette étude immense, rebutante, pénible, soit cependant la plus facile de toutes? Voilà, je crois, MESSIEURS, les objections qu'on pourroit me faire; mais je me flatte d'y opposer des réponses satisfaisantes.

Je me garderai bien cependant d'imiter le zéle indiscret de ces Ecrivains qui, lorsqu'ils entreprennent un éloge, frondent sans égard tout ce que, raisonnablement ou non, l'on pourroit mettre en paralele avec le sujet qu'ils traitent. Je suis fort éloigné d'élever les Mathématiques sur les ruines des autres Sciences. Ce seroit faire tort aux unes & aux autres. Les Muses sont soeurs. Ce titre semble supposer de l'union entre elles. Pourquoi s'en trouve-t-il si peu chez leurs Partisans? Si je sens mon amour propre se révolter au mépris qu'on affecte pour une Science qui fait mes délices, mon intérêt personnel autant que celui de l'humanité ne m'engagent-ils pas à ménager l'amour propre de mes semblables? Je dois l'apprivoiser, si je crains qu'on effarouche le mien. Je dois respecter le goût d'autrui, si je désire que mon penchant soit à l'abri de la critique. J'éviterai donc avec soin toutes ces comparaisons injurieuses, qui, faisant d'une partie des hommes un spectacle risible pour l'autre, sont ordinairement condamnées de tous. La matiere est assez abondante, assez riche de son propre fonds pour amener la vérité que j'avance à l'évidence la plus caractérisée, sans admettre rien d'étranger à la question que je me propose de traiter.

Au reste, je ne hazarde point un sentiment isolé; je ne fais qu'adopter celui des plus grands Maîtres. Je pourrois même appuïer ma proposition sur une foule de témoignages des plus graves. Mais pour mettre tout le monde en état de juger de mon éxactitude: je me borne à citer deux Auteurs fort connus. M. Privat de Molieres dit: *Que la Science des Mathématiques utile à tout le monde est en effet la plus aisée & la clef de toutes les autres.* Il fait plus, il ajoute: *Qu'il n'y a personne qui ne puisse & qui ne doive en entreprendre l'étude.* L'Auteur des nouvelles institutions de Géométrie fait voir: *Que de toutes les études, il n'en est point qui soit si parfaitement à la portée des enfans, que celle de la Géométrie.*

On m'objectera sans doute qu'en matieres Géométriques on ne se soumet qu'à la raison, & qu'on se refuse à l'autorité. Il s'agit donc moins de savoir si tels ou tels Auteurs ont avancé telle ou telle opinion, que d'examiner si cette opinion est fondée. J'en conviens, MESSIEURS, & je vais essaïer de vous prouver : *Que l'étude des Mathématiques est facile, & que cette science est d'une utilité sans bornes.* C'est à quoi se réduira tout mon Discours.

MON premier objet, MESSIEURS, doit être de prouver la facilité de l'étude des Mathématiques : pour y parvenir, il faut d'abord écarter les préjugés qui pourroient y être contraires. Le vulgaire ignorant suppose que rien n'est plus difficile que l'étude des Mathématiques, j'avouerai même que cette opinion est presque générale ; mais en est elle pour cela plus constante ? Une erreur, fut-elle universelle, n'en seroit pas moins une erreur, son universalité même ne fait que la rendre moins tolérable. Plus elle est répandue, plus elle est dangereuse, plus il est important de la détruire. Cette prévention, permettez-moi, MESSIEURS, de vous le dire, est du nombre de ces erreurs accréditées qu'une ignorance présomptueuse a fait naître & que la paresse entretient. Elle est semblable à ces Fables grossiéres par lesquelles des Peuples entiers prétendent expliquer des évenemens naturels qu'ils ne connoissent pas.

Certain du mouvement uniforme & constant des Planetes, l'Astronome prédit à coup sûr les Eclipses qu'il a calculées. Le plus borné de nos villageois attend de jour en jour celles que son Almanach lui annonce. Ce dernier même se riroit de la fraïeur chimérique & des soins ridicules de ces Peuples sauvages qui, persuadés que la Lune est dans les douleurs de l'enfantement ou que le Soleil s'apprête à la dévorer, croïent par le bruit & les clameurs procurer à l'Astre de la nuit une plus promte délivrance ou l'aider à sortir heureusement du combat.

Mais sans chercher aux extrémités de l'Univers des exemples aussi honteux que frappans de l'extravagance humaine ; combien de tems, combien de fois, nos Aïeux n'ont-ils pas été aveuglés par des préjugés aussi peu raisonnables ! La fureur de l'Astrologie judiciaire n'a t-elle pas inondé toute la surface de la Terre

pendant une longue suite de Siecles ? Tous les Peuples n'ont-ils pas respecté ses illusions & ses impostures comme des décrets infaillibles ? Quelles contradictions, que dis-je ? Quelles persécutions n'ont pas essuiées pendant leur vie ces flambeaux du monde, ces Philosophes profonds dont nous respectons à si bon droit la mémoire ? La perte des biens, la prison, l'éxil ont été la récompense de leurs découvertes & le prix de leurs travaux. Ils se sont vûs poursuivis par des décrets foudroïans qui n'ont flêtri que l'ignorance & l'intérêt qui les avoient décernés. Fermons les yeux sur un spectacle aussi humiliant d'une part qu'il est attendrissant de l'autre. Tirons un voile favorable sur les erreurs de nos Peres. Rougissons pour eux des absurdités dans lesquelles ils sont tombés. Plaignons-les d'être nés dans des Siécles moins éclairés que le nôtre. Mais au lieu de nous féliciter sur notre prétendu bonheur, travaillons pour en acquerir un réel, faisons nos efforts pour découvrir la vérité : ne fût-ce que pour priver nos descendans de l'avantage que nous croïons avoir sur nos prédécesseurs, & leur épargner la honte de rougir de nos travers, comme nous rougissons des écarts de nos Ancêtres.

Réfléchissons sur nous-mêmes. Sommes-nous exempts de fausses opinions ? Non sans doute, celle que j'entreprens de détruire en est une preuve. Essaïons d'en découvrir la source.

Nous voïons tous les jours des gens pleins de confiance qui veulent parler de tout & décider sur tout. Ils auroient souvent peu de chose à dire en ne parlant que de ce qu'ils connoissent. Ils auroient aussi trop à faire, s'il leur falloit examiner tout ce dont ils veulent parler. Ils prononcent comme bien instruits sur ce qu'ils ne savent que par soupçons, & font les dédaigneux sur ce qu'ils ignorent ; par conséquent leurs approbations sont rares. C'est sans doute à des autorités de ce mérite que le préjugé que je combats doit son origine. Tâchons de développer comment il a pu se soutenir.

Tous les hommes n'ont pas le ton décisif. Il en est beaucoup au contraire qui ne se reglent que sur le rapport d'autrui. Echos successifs les uns des autres, ils répétent machinalement aujourd'hui ce qu'ils ont appris machinalement hier ; ils sont indifferemment les canaux de l'erreur ou de la vérité. Semblables à la cire molle, ils reçoivent également toutes sortes d'empreintes. Ils ne soupçonnent pas ou s'embarrassent peu qu'on ait pu les tromper. A combien de faux jugemens cette conduite ne les expose-t-elle pas ?

Si quelqu'un de ces Automates croïoit s'excuser en disant : *Mais, je ne suis pas Géomètre, & par conséquent je ne puis me déterminer à cet égard que sur la foi d'autrui ;* je lui répondrois que ce défaut de lumieres est un prétexte fort défectueux. Quoi ! si je ne connois pas la Musique, si mes oreilles peu délicates ne sont point affectées de l'harmonie la plus mélodieuse, me sera-t-il permis d'assurer d'après le témoignage de quelqu'autre qui n'en saura pas plus que moi, que les Œuvres de Lulli, de Rameau, ne sont que des compositions médiocres ? *Faites-vous instruire, nouveau Midas,* me répondroit quelque Misantrope, *avant de décider sur des beautés qui vous sont inconnues ; ou au moins dispensez-vous d'en juger.*

Mais supposons qu'un homme plus judicieux désirant savoir ce qu'il doit penser sur une matiere qu'il ne connoît pas, s'adresse à quelqu'un qu'il sait l'avoir étudiée. Sera-t-il certain que son oracle soit exemt de passion ? La réponse ne peut-elle pas être dictée par la vanité, par une basse envie ou par un sordide intérêt ? Par exemple, qu'un de ces hommes dissipés, plus curieux de s'amuser que de s'instruire, ait lû des Livres de Mathématiques avec l'attention qu'il apporte à la lecture de ces licentieuses bagatelles que peu de gens sensés connoissent, & que la postérité ne nous reprochera jamais. Il ne tire aucun fruit de ce prétendu travail. Rien n'est moins surprenant. Celui qui voïage en poste peut-il faire une description géographique des lieux qu'il parcourt ? Demandez-lui ce qu'il pense des Mathématiques. *Assurément,* vous répondra-t-il, *je ne sais rien de si difficile au monde, je ne manque pas de pénétration ; cependant je les ai étudiées avec tout le soin dont je suis capable, & je vous avouerai que je n'y entens rien.*

Faites la même question à un génie borné qui les posséde médiocrement après une étude assidue de trente années. *Rien n'est plus attraïant,* vous dira-t-il, *rien n'est plus grand, rien n'est plus flateur ; mais aussi rien n'est plus difficile. Je suis en état d'en juger, & je sais combien il m'en a couté de travail.* Sa réponse est aussi sincere que celle du premier. Il vous trompe d'aussi bonne foi qu'il s'est trompé lui-même. Son amour propre ne lui permet pas de penser qu'un autre que lui puisse en moins de tems acquérir les mêmes connoissances. La vue de l'Aigle passeroit pour une chimere auprès d'une Taupe qui raisonneroit.

Qu'on

Qu'on s'adresse ensuite à un homme sensé, qui, privé des excellens traités que nous avons sur presque toutes les parties, n'ait eu à sa disposition que quelques-uns de ces ouvrages hérissés d'un bout à l'autre de raisonnemens sans raison; de ces livres qui ne sont qu'un cahos de galimathias obscurs, qu'un fatras mal tissu de pieces rapportées sans choix, sans liaison, sans ordre. Supposons encore qu'il ait eu le malheur de lire ces ridicules brochures inintelligibles même à leurs Auteurs, dans lesquelles au lieu de démontrer, ainsi qu'on l'annonçoit, des découvertes admirables, on a seulement prouvé jusqu'où peuvent aller l'ignorance & l'orgueil. Je conviendrai sans peine avec lui qu'il a dû trouver bien des obstacles à surmonter dans une étude si mal dirigée. Comment ne pas s'égarer en suivant de mauvais guides? On ne peut jamais les quitter assez tôt.

Mais interrogez le même homme après qu'il aura lû les Elemens du Pere l'Ami, du Pere Reyneau: Quand il connoîtra Malezieux, l'Hôpital, Varignon; quand, formé par les bons ouvrages de nos contemporains, vous le verrez suivre sans hésiter Descartes, Newton, Leibnitz, & lire avec autant de goût que de fruit les savans Mémoires de nos Académies d'Europe; interrogez-le, dis-je, sur l'Etude des Mathématiques. Sa réponse n'est pas douteuse. Il ne trouvera pas d'expressions satisfaisantes pour vous faire sentir la prodigieuse différence qu'il aura éprouvée entre ses derniers travaux utiles & ses premieres tentatives infructueuses.

Delà nous conclurrons qu'on doit s'abstenir de juger des matieres qu'on ne connoît pas par soi-même, & qu'en suivant le torrent des opinions communes, on risque souvent de se laisser entrainer à des préjugés honteux. Avec cette disposition prudente, notre esprit devient plus capable de démasquer l'erreur & de s'attacher à la vérité. Il ne s'agit donc alors que de connoître l'une & l'autre. J'espere, MESSIEURS, vous mettre bientôt en état de décider entre elles. Ce n'est point par des autorités, c'est par des raisons que je me flatte de vous convaincre. J'en appelle à vos propres lumieres. Quelles ressources n'y trouverai-je pas?

La nature nous a fourni les Principes de la Numération, & par conséquent de l'Arithmétique. A peine un enfant com-

mencé-t-il à bégaïer sa langue, qu'il commence aussi à compter par ses doigts. Les premiers hommes ont sans doute fait la même chose. Au moins la méthode de nombrer par dixaines, qui est commune à presque toutes les Nations, marque entre elles une convention tacite de se servir de cette mesure invariable que le Créateur a donnée à tous les hommes. Si d'abord ils ont exprimé chacun des dix premiers nombres par un de leurs doigts, ils ont bientôt remplacé chaque doigt par un caractere. Ensuite ce Calcul trop borné les a conduits tout naturellement à désigner le nombre de dixaines, ou, si l'on veut, le nombre de fois qu'ils avoient compté leurs dix doigts, par de nouvelles marques distinctives qui n'ont pu dépendre que de la varieté des notes ou du changement de lieu. Lorsque ce nombre de dixaines est devenu égal à celui des doigts, il a fallu encore une nouvelle place ou un nouveau signe. Mais on a senti qu'on rendroit le calcul embarassant en multipliant les chiffres. On a donc mieux aimé convenir que leur valeur dépendroit à la fois de leur figure & de leur place. On a distingué différens ordres de nombres, & pour exprimer le plus petit nombre de chacun de ces ordres, on a supprimé le plus grand de l'ordre immédiatement inférieur. C'est ainsi qu'après avoir substitué les dix chiffres aux dix doigts, on est venu successivement au point d'exprimer tous les nombres possibles sans multiplier les caracteres.

Les opérations de l'Arithmétique sont aussi simples que la numération elle-même. Non-seulement tout homme peut les entendre, mais encore tout homme de bon-sens est capable d'inventer une maniere de les exécuter. C'est sans doute par cette raison qu'on a tant de méthodes différentes qui tendent au même but, & parmi lesquelles il s'agit seulement de choisir les plus simples & les plus simmétriques. On seroit donc mal fondé à y supposer des difficultés qui ne s'y rencontrent pas. Aussi voit-on peu de personnes s'en plaindre.

Il n'en est pas de même de l'Analogie ou de la Science des rapports, proportions & progressions. Bien des gens regardent cette partie comme une Science épineuse & dont la théorie délicate échape à ceux qui n'ont pas une certaine disposition &, pour ainsi dire, une certaine proportion d'esprit. Essaïons de détruire cet obstacle imaginaire.

On conviendra, je crois, que de deux hommes le plus grand

doit avoir l'habillement le plus long. Cette idée renferme deux rapports, l'un entre les deux hommes, l'autre entre leurs habits. On conçoit avec la même facilité que ces deux hommes seront également bien habillés, si (toutes choses d'ailleurs égales) chacun des deux habits est également juste à la taille de celui qui le porte. Cette comparaison de deux rapports égaux forme une proportion. Enfin, si depuis le Nain jusqu'au Géant nous supposons une suite d'hommes dont les tailles différentes croissent selon un certain ordre, les longueurs & largeurs de leurs habits doivent croître suivant le même ordre. Cette suite de rapports égaux n'est autre chose qu'une progression. Qu'après avoir saisi cette idée, on lise attentivement un traité de proportions, je défie qu'on puisse être arrêté par quelque difficulté sérieuse. Il est vrai que celui qui ne concevra pas que le rapport de son habit au mien doit être égal au rapport de sa taille à la mienne, fera sagement de ne point étudier l'Analogie. Mais parmi tous les hommes, qu'on m'en trouve un.

Au contraire si le concours d'une infinité de suffrages étoit suffisant pour autoriser une opinion, jamais préjugé n'auroit été mieux établi que celui qu'on a contre l'Algébre. Cependant jamais préjugé ne fut moins raisonnable. On dit que l'Algébre est effraïante. On ne dit pas en quoi. Je pense même qu'on seroit fort embarassé d'en rendre raison. En effet, MESSIEURS, tâchons de découvrir dans l'Algébre la prétendue cause de cette fraïeur chimérique. Elle ne peut éxister que dans le Calcul en lui même ou dans les caracteres dont se servent les Algébristes. Mais ce qui n'est apperçu ni par l'esprit ni par les sens ne peut faire aucune impression sur nous. Le Calcul en lui-même n'est pas un objet sensible; ainsi ceux qui ne le connoissent pas, ne peuvent en être effraïés. Bien-loin qu'il épouvante ceux qui le connoissent, on y trouve au contraire un attrait invincible dès qu'on en découvre l'esprit & l'objet. C'est de quoi j'espere vous convaincre, dès que j'aurai l'honneur de vous en parler. Cette fraïeur supposée ne peut donc avoir d'autre principe que les caracteres algébriques. Le fondement est singulier. Quoi! MESSIEURS, permettez-moi la comparaison : vous voïez pour la premiere fois un coursier impétueux. Vous le fuïez sans savoir s'il est utile ou nuisible; &, ce qu'on n'auroit pas soupçonné, ce n'est point l'animal, c'est son harnois qui vous épouvante. Rassurez-vous, il est fait pour votre commodité; prenez la peine d'en

approcher ; éxaminez cet équipage qui vous surprend. Si la fabrique vous paroît nouvelle, au moins vous en reconnoîtrez la matiere, & bientôt vous saurez en faire usage.

En effet les caractéres algébriques ne sont point des hiéroglyphes mistérieux dont l'intelligence soit fort difficile, ce sont des signes très simples, des chifres & des lettres.

Chaque signe a sa signification particuliére & le plus compliqué n'éxige que deux traits de plume. On est convenu de mettre un signe à la place d'un ou de plusieurs mots qui figureroient très-mal dans le calcul. Ces signes ne sont autre chose que des abbreviations. Il suffit de les avoir vûs une fois pour ne pouvoir oublier leurs figures ni leurs valeurs, ce n'est donc pas sur les signes que peut tomber la difficulté.

Elle peut encore moins concerner les chifres, on n'a pas de peine à les connoître, les frais en sont faits quand on en vient à l'Algébre ; & leur usage, semblable à celui des signes, n'est que d'abréger l'expression des quantités.

Enfin nous touchons au point décisif, c'est sans doute à l'explication de l'usage & de la valeur des lettres que m'attendent les adversaires de l'Algébre. Il est vrai, MESSIEURS, que cette difficulté qui n'en a jamais été une pour qnelque Algébriste que ce soit, n'a point été résolue d'une maniere satisfaisante pour ceux qui ne connoissent que le nom de l'Algébre. Je ne crois pas qu'aucun Auteur ait pris la peine d'expliquer l'usage des lettres. Cet usage est si simple que sans doute il ne leur est pas venu à l'esprit qu'on pût former le moindre doute à cet égard. Quoi qu'il en soit, voïons de quelle maniere on peut détruire cette difficulté prétendue.

Il n'est personne qui n'ait vû quelque estampe, quelque plan, quelque dessein chargé d'un grand nombre d'objets. « Imaginons » par exemple, avoir sous les yeux une vue de la ville de Paris : » ce dessein remis entre les mains d'un homme qui n'auroit ja- » mais vû Paris, ne lui laisseroit qu'une idée fort imparfaite de » cette grande ville, si rien ne lui désignoit quels sont les édi- » fices qu'il y voit représentés ; mais aussi ce même dessein se- » roit trop confus, si l'on avoit mis sur chaque bâtiment » le nom qui lui convient. Pour le rendre plus utile sans l'em- » brouiller, on y désigne les lieux remarquables par des lettres » de renvoi qu'on repete à la marge, & vis-à-vis de chacune » on met le nom de l'édifice sur lequel on a placé cette même

» lettre dans le dessein. Tous ces renvois & leurs explications » forment ce qu'on appelle l'*Index* ou la table du dessein. »

On n'a jamais soupçonné qu'il fut besoin d'une étude particuliére pour entendre l'usage de ces lettres de renvoi; celles dont on se sert en Algébre ne sont pas autre chose, on n'y trouvera pas la plus légere différence. La préparation d'un calcul algébrique est une légende véritable dans laquelle on convient de représenter telle ou telle quantité par tel ou tel caractere. Or tous étant indifférens pour cet usage, les plus familiers qui, sans contredit, sont ceux de l'Alphabet, doivent être préferés. D'ailleurs qu'on en trouve de plus connus, de plus simples, de plus faciles à concevoir & à retenir : j'y souscris aussitôt qu'on m'en aura prouvé la commodité.

Je crois, MESSIEURS, avoir détruit le préjugé qui supposoit l'Algébre inintelligible, rebutante & presque capable d'effraïer. Dans un moment, en parlant de ses avantages, j'examinerai les autres objections qu'on a faites contre ce Calcul. Il s'agit à présent de faire connoître combien est peu fondé le reproche de la prétendue sécheresse qu'on impute à la Géométrie.

La Géométrie est la science de l'étendue. Personne ne contestera cette définition. L'idée que nous avons de l'étendue est une idée simple. C'est envain qu'on a voulu la définir, tous ceux qui l'ont tenté sont tombés dans des pétitions de principe en la supposant déja connue, ou leurs explications surabondantes n'ont servi qu'à obscurcir ce qu'on avoit clairement conçu sans le secours de leurs définitions. Tout ce que nous voïons & tout ce que nous pouvons voir est de l'étendue. La Terre que nous habitons, les Astres qui nous éclairent, l'interval prodigieux qui nous en sépare, l'espace que nous imaginons encore audelà, ne peuvent éxister sans composer de l'étendue. Ce principe est le premier & peut-être le seul que nous concevions de nous-mêmes aussitôt que notre raison commence à se développer. L'objet de la Géométrie est donc universellement & nécessairement connu de tous les hommes.

Je vais plus loin & je soutiens que cette science elle-même est naturelle à tous les hommes. Je pourrois citer à ce propos l'exemple du fameux Paschal qui, sans aucuns secours étrangers, en formant des raisonnemens, tirant des conséquences, traçant des figures & leur imposant des noms arbitraires, découvrit un assez grand nombre de propriétés importantes. Mais on me

répondroit ſans doute que ce vaſte génie pouvoit réuſſir dans une entrepriſe où mille autres auroient échoué. Renonçons, j'y conſens, aux inductions que nous pourions tirer d'un fait auſſi favorable à ma propoſition. Examinons ſi dans tous les hommes on ne trouve pas le germe de la Géométrie. Découvrons leur des tréſors qu'ils poſſedent ſans les connoître & ſans en faire uſage.

Le moins ſavant des hommes l'eſt aſſez pour choiſir le plus court de deux chemins; il préférera toujours le plus droit. Il jugera qu'une avenue eſt bien droite, ſi le premier arbre de chaque rang, vû d'une certaine diſtance, peut cacher à ſes yeux le rang tout entier. S'il veut connoître la largeur d'un foſſé, d'un canal, il meſurera la ligne la plus courte qui puiſſe aller d'un bord à l'autre. Au contraire il prendra la plus grande ligne poſſible pour la largeur d'un baſſin circulaire. Il placera l'ajutage à la moitié de cette ligne & ſera ſur de l'avoir mis au milieu du baſſin. Il ſait (pour parler en termes d'ouvriers) qu'une muraille qui ſurplombe menace ruine & que dans un bâtiment les planchers doivent être de niveau, & les murs d'àplomb; il eſt également perſuadé que ce bâtiment ne peut être régulier, ſi les murs ne ſont d'équerre entre eux. L'irrégularité le choque & lui déplaît. La ſimmétrie, l'accord de toutes les parties d'un édifice flattent agréablement ſa vue. Il n'ignore pas que deux terrains peuvent former des eſpaces inégaux, quoique leurs figures ſoient ſemblables, & que deux terrains de figures différentes peuvent former des eſpaces égaux. Je ne finirois pas ſi je voulois épuiſer cette matiere & détailler toutes les connoiſſances géométriques qui ſont naturelles & communes à tous les hommes, & qui les conduiroient à la découverte des principes les plus importans, ſi, nouveaux Paſchals, & s'avançant de réflexion en réflexion, ils ſe ſervoient de ces premieres idées ſimples comme d'autant de degrès capables de les élever à des idées moins communes, de les faire parvenir à des vérités plus ſublimes.

Où donc trouvera-t-on cette prétendue ſécherеſſe dont on accuſe la Géométrie? Nous venons de voir qu'elle n'eſt pas dans la ſcience : ſera-t-elle dans la maniere de l'étudier? Non, ſans doute. Il ne s'agit point de ſurcharger ſa mémoire d'une multitude de mots inconnus qui ne préſentent aucune idée à l'eſprit. Qu'on trace devant un enfant un triangle, un cercle, un carré, la figure & le nom s'en impriment dans ſon imagina-

tion avec la plus grande facilité. Toutes les vérités de la Géométrie sont exposées d'une maniere sensible. Ses raisonnemens sont à la fois les plus courts & les plus convaincans. Sa méthode est généralement reconnue pour la plus parfaite. Tout est précis, tout est animé, tout est intéressant dans cette étude, & par conséquent rien de moins aride ni de moins abstrait. Rien au contraire n'est plus satisfaisant, rien n'est plus enchanteur. J'en appelle à l'expérience.

Quel est donc le fondement d'un préjugé si peu raisonnable ? On ne peut découvrir la vérité sans travail. Le repos a des charmes pour une partie des hommes. Leur incapacité d'une part & la difficulté des sciences de l'autre, servent de prétexte & d'excuse à leur oisiveté. Ils aiment beaucoup mieux passer le tems précieux de leur vie à ne rien faire ou à faire des riens, que de l'emploïer utilement à des travaux qu'ils ne croïent pas capables de contribuer à leurs plaisirs ou à leur fortune. Au moïen de cette inaction, quoique la vérité soit le plus noble appanage de l'homme, son empire est aussi borné que celui des passions est étendu.

C'est sans doute par un motif semblable qu'on se dispense d'étudier les Sciences vulgairement comprises sous le nom de Méchaniques. Cependant l'indolence a pris un autre prétexte. Nous venons de voir qu'on accusoit la Géométrie de stérilité. On reproche aux Méchaniques leur abondance. *La Géométrie*, dit-on, *n'a d'autre objet que l'étendue. Quelle sécheresse ! Peut-on se résoudre à un travail si uniforme, si rebutant ? Dans la Méchanique on considéré l'espace mobile & fixe, la force, la pésanteur, la durée : Quelle complication ! comment entreprendre une étude aussi immense, aussi variée ?* C'est ainsi, MESSIEURS, que les partisans du repos savent éluder sous des prétextes opposés tout ce qui pourroit les en tirer. Examinons si ce reproche est mieux fondé que le précédent.

Tout le monde est convaincu qu'il n'y a point d'effet sans cause. Le mouvement d'un corps est un effet qui dépend toujours de plusieurs causes. La direction de la force motrice, la masse du corps qu'elle meut, la vitesse qu'elle lui imprime, déterminent son mouvement. Qu'une balle de mousquet, par exemple, soit poussée verticalement avec une force capable de lui faire parcourir une lieue dans une minute ; on sent bien qu'entrainée par son poids vers la terre elle perd à chaque ins-

tant une partie de sa premiere vitesse, & qu'enfin elle cessera bientôt de monter. Au contraire sa vitesse augmente à tous les momens de sa chute, & sa seule pesanteur la feroit descendre éternellement, si rien ne s'opposoit à son passage. La même force qui retarde son mouvement en s'y opposant dans le premier cas, concourt à l'accélerer dans le second. Le Méchaniste ne peut découvrir les effets inconnus du mouvement sans en examiner les causes, & pour ainsi dire les conditions connues. C'est pour cela qu'il exprime par autant de différens caracteres toutes les quantités qui doivent contribuer à la solution d'une question de Méchanique. Delà vient, comme je l'ai déja dit, le préjugé que je me propose de détruire. Encore un mot, il tombera de lui-même.

L'étude de la Méchanique suppose à la vérité des connoissances préliminaires sans lesquelles on ne peut esperer d'y faire de solides progrès. On y seroit arrêté presque à chaque pas si l'on ne savoit se tirer heureusement d'un calcul ingénieux, trouver les rapports des quantités de même nature & découvrir les inconnues: si l'on ignoroit les principaux effets naturels & les proprietés de l'espace. Mais puisque nous plaçons cette étude à la suite de celles du Calcul, de l'Analogie, de l'Analise & de la Géométrie, tout ce qui n'exige que ce que ces Sciences ont dû nous enseigner ne peut être un obstacle sérieux pour nous. Or toute la Méchanique est fondée sur ces connoissances & sur quelques principes de Phisique reconnus par l'expérience, & avoués de tous les Savans. Par conséquent elle ne peut avoir de véritables difficultés que pour ceux qui, sans entrer en lice, envient au vainqueur le prix qu'ils n'ont pas essaïé de mériter.

Ce seroit offenser les Dames que de citer les succès de celles qui ont étudié les Mathématiques, comme une preuve nouvelle de la facilité de cette Science. Ce seroit suivre le torrent d'un ancien préjugé fondé sur notre amour propre beaucoup plus que sur la raison. Ce seroit supposer avec le vulgaire que peu capables de réflexion, elles doivent se borner aux agrémens. Ce seroit enfin démentir des faits publics, & mon expérience particuliére. Malgré toute l'attention qu'un intérêt mal entendu nous fait apporter pour entretenir de frivolités la plus belle moitié du monde, malgré l'aveuglement dans lequel notre injustice cherche à la plonger, la célébre

Marquise

Marquise du Châtelet que l'Europe savante regrette avec nous, excite plus d'émulation que de surprise. Nous lui trouvons dans les nations voisines aussi bien que dans la nôtre, plus d'une rivale qui joint aux graces de son sexe les vertus du nôtre, & les talens des deux. Nous en verrions sans doute un bien plus grand nombre, si tous les chefs de famille, aussi judicieux que quelques-uns que j'ai l'avantage de connoître, faisoient donner à leurs enfans des deux sexes une égale éducation, avec autant d'exactitude qu'ils en apportent à partager également entre eux leur tendresse & leur fortune.

Mais rien ne prouve mieux combien l'Etude des Mathématiques est attraïante & facile ; que les progrès que font dans cette Science les enfans à qui (pour ainsi dire) on en fait succer les Elemens avec le lait. Exemts des préjugés qui sont les fruits malheureux d'un âge plus avancé, ils reçoivent avec avidité ces premieres impressions qu'ils retiennent toute leur vie. Entrainés par les charmes de la vérité, ils deviennent des hommes avant d'arriver à l'adolescence.

Entre les exemples qui m'ont frappé davantage, qu'il me soit permis d'en rapporter un. J'ai vû il y a quelques années une jeune enfant, émule de deux freres à peu près de son âge, leur disputer la gloire d'exceller dans l'Etude de la Géométrie. J'ai vû ces aimables rivaux, à peine au sortir du berceau, préférer le craïon, la regle & le compas aux premiers colifichets dont on amuse ordinairement leurs semblables ; & bégaïer les vérités géométriques avec des témoignages de satisfaction qui ne laissoient aucun doute sur leur intelligence. J'ai vû (j'ose le dire) ces enfans se faire un amusement d'une étude qu'on croit n'appartenir qu'à des hommes déja formés ; dans le tems même où la moitié des François s'occupoit à des jeux d'enfant.

Nous conclurrons donc que l'étude des Mathématiques est simple, agréable, intéressante, & que les principes de cette Science exposés avec ordre & developpés avec soin, sont intelligibles à tous. Mais aux preuves de sa facilité, joignons celles de son utilité qui vont faire l'objet de ma seconde partie.

GRACES à la diviſion qui régne parmi les hommes on ne doute point de la néceſſité d'apprendre l'Arithmetique & les proportions. On ſait que le commerce, le change & toutes les négociations particuliéres ne roulent que ſur ces deux pivots. On en fait la partie eſſentielle de l'éducation la plus commune. Ceux qui négligent le plus les ſciences capables de former, de nourrir & d'orner l'eſprit, ſont ordinairement les plus attachés à leurs intérêts; par conſéquent rien de mieux prouvé à leur égard que l'utilité du calcul numérique: mais les plus deſintéreſſés des hommes, les plus Philoſophes ſont perſuadés que l'Arithmétique eſt l'introduction aux Mathématiques, & que l'Analogie eſt l'ame des Sciences & des Arts, ainſi tout le monde eſt également convaincu de leurs avantages.

Il n'en eſt pas de même de l'Algébre. Cependant on ſe tromperoit en me croïant plus embarraſſé à prouver l'utilité de ce Calcul, qu'à faire voir ſa facilité. Je puis aſſurer avec confiance que cette ſeconde preuve me ſera plus aiſée encore que la précédente.

L'Arithmétique eſt trop bornée pour réſoudre la plûpart des queſtions qu'on peut faire ſur les Mathématiques. L'Algébre au contraire ſatisfait également à toutes par ſa proprieté ſinguliére d'exprimer toutes ſortes de quantités qu'on ne pourroit pas toujours repréſenter par les nombres.

Qu'on me permette ici de prévenir ce qu'on pourroit m'objecter. *Vous nous avez fait entendre il n'y a qu'un moment*, me diroit-on, *que chaque lettre doit être priſe comme une note qui renvoie à l'explication qu'en donne la préparation du calcul. Actuellement vous avancez que ces mêmes lettres repréſentent des quantités que les nombres ne pourroient pas exprimer. Accordez-vous donc avec vous-même. Ne vous voit-on pas le plus ſouvent à la fin d'un calcul ſubſtituer des nombres aux lettres? chacune de ces lettres que vous remplacez par un nombre avoit donc dans votre hipothèſe la valeur de ce nombre qui lui ſuccéde. La bigarrure dont vous chargez votre calcul eſt donc une pure affectation de votre part. Bien plus, vous faites deux calculs pour un. Car après avoir fini vos opérations ſur les lettres, vous les repétez ſur les nombres; à quoi donc vous ſert l'Algébre? Eſt-ce ainſi que vous abregez?*

Je conviens, MESSIEURS, que les lettres dont ſe ſert l'Algébre expriment toujours des quantités, mais elles ne repréſentent pas toujours des nombres. Dans les cas même où il ne s'agit que

de nombres, il y en a toujours quelques-uns d'inconnus, & la question est de les trouver. Par conséquent on ne peut pas les exprimer en nombres. Il faut donc choisir quelques caractéres qui les représentent, qui en tiennent la place & par le moïen desquels on puisse découvrir ce qu'on cherche.

Mais, répondra-t'on, *exprimez tant qu'il vous plaira les quantités inconnues par des lettres, & n'augmentez pas l'obscurité d'un Problême en supprimant les quantités connues & les représentant aussi par des signes de même espéce.*

A cela je repliquerai qu'on n'obscurcit point les questions proposées; car on distingue tellement ce qui est connu d'avec ce qui ne l'est pas, qu'il est impossible de s'y tromper. Au contraire on diminue le travail, puisque d'une part on évite tous les calculs particuliers dans lesquels ces nombres connus jetteroient nécessairement, & que de l'autre on découvre & l'on suit, pour ainsi dire, pas à pas, tous les changemens successifs qui surviennent à chacune des quantités qui entrent dans un calcul algébrique. Ces grandeurs sont toujours distinctes les unes des autres, elles ne souffrent aucun mélange, & les nombres ne pourroient manquer de se confondre.

» L'Arithméticien ne ressemble pas mal à un voïageur qui » s'approche de l'objet auquel il tend & qu'il apperçoit de loin, » mais qui ne remarquant pas le chemin qu'il a pris, ne peut » plus le reconnoître quand il s'agit de retourner sur ses pas; au » lieu que l'Algébriste en allant à son but marque par des traces » ineffaçables la route qu'il suit, ensorte qu'il ne lui est pas possi- » ble de la méconnoître. L'Algébre est, pour ainsi dire, à son » égard un char commode qui le conduit où la foiblesse de ses » jambes ne lui permettroit pas d'arriver. Mais en même-tems » les roues de ce char gravant de profondes traces de leur passa- » ge, lui désignent la voie qu'il a suivie, & par laquelle il peut » revenir. »

Mais la plus importante propriété de l'Algébre, celle qui caractérise le génie de ce Calcul est de tout généraliser. La résolution algébrique d'un Problême, renferme la solution de l'infinité de Problêmes de la même espéce. Tâchons de rendre ceci plus sensible par un exemple.

Le commerce épistolaire quelque varié qu'il soit peut être réduit à certaines regles. En général il sert à instruire un absent des évenemens qui regardent celui qui écrit, ou celui auquel on

écrit, ou qui les concernent tous deux, ou enfin qui n'intéressent ni l'un ni l'autre. Mais les évenemens singuliers sont rares. Ceux dont nous sommes témoins différent peu de ceux qui sont arrivés du tems de nos peres: & nous pouvons présumer que notre postérité verra revenir à peu près les mêmes incidens. Quoique le cours de la Fortune suive un ordre moins reglé que celui de la Nature, quoique peut-être il n'en suive aucun : ce cours, tout impénétrable qu'il soit pour nous, n'en est pas moins certain.

Supposons donc que dans la vûe de réserver pour d'autres occupations le tems qu'on emploie au commerce épistolaire, on fut dans l'usage d'imprimer des modéles de toutes sortes de lettres. Imaginons encore que l'on pût réduire la quantité de ces modéles à un certain nombre déterminé, sauf à faire imprimer un nouveau modéle pour un évenement qui n'auroit pas été prévû. Il est évident que le nombre réel de lettres seroit réduit au nombre de modéles, parce que le même fonds seroit commun à des milliers de lettres particuliéres qui différeroient peu les unes des autres. On choisiroit donc pour chaque affaire différente un imprimé convenable, & au lieu d'écrire une lettre entiére, on ne feroit autre chose que de remplir à la main les places reservées pour mettre les noms, les dates & quelques autres circonstances qui ne dépendroient que du plus ou du moins. Par ce moïen un même homme pourroit envoïer cent lettres circulaires à autant de personnes différentes, en moins de tems qu'il n'en met à tracer une lettre seule.

L'Algébre réalise par rapport aux quantités, la supposition que je viens de faire relativement au commerce épistolaire. Tous les jours on repéte les mêmes questions en changeant seulement les quantités connues : & si l'on exprimoit ces quantités par les nombres, il faudroit aussi repéter les mêmes opérations, dès que, sans changer les conditions d'un Problême, on en changeroit seulement les quantités connues. Mais au contraire chaque solution algébrique est un modéle pour résoudre toutes les questions qui peuvent y être rapportées. Faisons une nouvelle application.

Supposons qu'on nous demande quels sont deux nombres inconnus dont on détermine la somme & la différence. Si nous faisons entrer dans le calcul les quantités connues telles qu'elles sont données, nous trouverons, il est vrai, les nombres demandés, mais nous ne découvrirons rien de plus. Or tous les nom-

bres possibles pris deux à deux, peuvent être successivement proposés pour somme & pour différence. Faudra-t'il donc repéter une infinité de fois le même calcul, si l'on propose une infinité de fois la même question? La vie d'un homme ne suffiroit pas pour résoudre entiérement la plus simple de toutes les difficultés! Au contraire si nous représentons les quantités connues par deux notes différentes; par exemple, la somme par la lettre *s*, & la différence par la lettre *d*, un calcul très-court nous donnera une solution générale qu'on appelle *une formule*, qui servira de modéle pour résoudre l'infinité de questions du même ordre; en sorte que dans un très-petit nombre de caracteres algébriques, nous lirons distinctement cette proposition. *De deux quantités inégales, la plus grande est toujours égale à la moitié de leur somme plus la moitié de leur différence, & la plus petite est toujours égale à la moitié de leur somme moins la moitié de leur différence.* Il en est de même de toutes les autres questions possibles. Peut-on après cela douter de l'utilité de l'Algébre? Quelle obligation n'avons-nous pas au Pere de la saine Philosophie, au célébre Descartes, qui est le restaurateur de ce Calcul, & qui s'en est servi pour nous fraïer une route nouvelle vers la Géométrie.

Gardez-vous bien, MESSIEURS, de borner l'utilité de cette derniere Science à l'idée que présente son étimologie. Les deux mots Grecs dont elle est composée signifient *mesure de la terre* ou *mesure de terrain.* Jamais signe n'eut moins de rapport à la chose signifiée. Un Pâtre grossier pourroit dire aussi justement que *la Musique est l'art de jouer de la musette.*

L'objet de la Géométrie est bien plus vaste que son étimologie ne l'annonce. Le titre qu'elle porte ne convient qu'à ce que nous appellons arpentage; art, ou si vous voulez, métier, dépendant à la vérité de la Géométrie, dont il est, pour ainsi dire, la partie la plus matérielle; mais qui de la maniere dont l'exercent ordinairement la plûpart de ceux qui se bornent à ce travail, peut, sans risque, être desavoué par la Géométrie.

« Entre toutes les Sciences qui composent les Mathématiques, la Géométrie tient le premier rang. Semblable à cet astre lumineux, dont les autres Planetes empruntent leur éclat, elle répand sur les autres parties de cette science sublime des clartés qu'aucune ne peut lui rendre, & sans lesquelles d'épaisses ténébres nous les déroberoient & les enseveliroient pour toujours. »

Mais ne divisons point ce qui doit rester uni. L'utilité de la Géométrie est, à proprement parler, celle de tous les arts. Elle est de tous les tems & de tous les lieux. Elle s'étend sur tout l'Univers habité, sur chaque état & sur chaque citoïen.

Il fut un tems heureux où les hommes liés par une tendre société, n'étoient point divisés par leurs différens intérêts. Unis par des liaisons intimes, leur affection mutuelle appaisoit leurs différens passagers. Leur équité savoit leur épargner des Loix. Mais on vit cette douce union diminuer à mesure que les hommes se multipliérent. Bien-tôt la fraude s'insinue, le crime ose paroître à découvert, la droiture étouffée gémit sous les efforts de l'imposture & de l'iniquité qui usurpent son empire : le vice triomphe, le commerce est rompu. Chaque mortel se croit en droit de commander aux autres, & s'imagine qu'il est reservé à lui seul d'unir & de gouverner cette multitude d'hommes qui n'ont plus rien de commun que le désir de se nuire & de se détruire reciproquement.

Nemrod plus entreprenant que les autres met à profit ces troubles & ces divisions. Jugeant que l'homme aveuglé par ses passions ne peut goûter les délices de la paix, s'il n'est conduit par la sagesse & s'il ne se soumet aux Loix d'un Chef assez puissant pour le contenir, assez prudent pour le régir : il conçoit le dessein d'être ce premier Chef. Il profite de la disposition favorable des pacifiques, il dompte les rebelles ; & rassemblant ces hommes errans & dispersés jusqu'alors, il les réduit à la dure nécessité de se bâtir des Villes, & les contraint de se forger eux-mêmes les chaînes salutaires qui vont désormais les retenir dans la tranquillité, l'union & la societé. Voïons la Géométrie mere de ce nouveau Peuple, tracer à chacun le lieu qu'il doit habiter, assigner au Prince son Palais, au Magistrat sa maison, à l'Artisan sa chaumiere, & faire éclater dans ce nouvel Empire quelques raïons de la splendeur dans laquelle on doit le voir briller.

Mais ce n'est pas assez pour ce Chef ambitieux de commander à ceux qu'il a soumis. Il forme le projet d'étendre son Empire. Déja les mortels inhumains abusent des bienfaits de la nature, ils tournent contre leurs freres ce fer que leur mere commune leur avoit donné pour leur servir à fouiller dans son sein & à se garantir de la furie des animaux. Dans ces premieres guerres les combattans sans regle, sans ordre, emportés par une aveugle fureur, ne quittoient ordinairement les armes que quand ils

n'avoient plus d'ennemis. Affamés de carnage ils préféroient le barbare plaisir d'assouvir leur haine en massacrant jusqu'au dernier de leurs adversaires, à l'honneur de leur pardonner généreusement. L'humanité, la prudence, la grandeur d'ame & toutes les autres vertus qui caractérisent le vrai Héros, leur étoient totalement inconnues. Quelle différence entre leurs combats & les nôtres! Souvent nos armées sont plus nombreuses, & nos champs de bataille sont toujours moins ensanglantés. Le grand art de la guerre, cet art devenu par l'injustice d'une partie des mortels aussi nécessaire que ses effets sont funestes, est devenu moins cruel à mesure que les hommes ont été plus éclairés. Instruits par les Mathématiques, ils ont sçû marcher avec ordre, camper avec sureté, se retrancher avantageusement & combattre sans confusion. Judicieusement avares du sang de leurs Guerriers, les différens Peuples de l'univers ont inventé une multitude de machines de guerre que notre Artillerie surpasse infiniment & dont elle ne nous a laissé que le souvenir. Les Mathématiques ont fixé l'art de pointer le canon & de jetter les bombes avec précision. Elles ont enseigné la construction de tous les travaux des siéges. C'est par leur moïen qu'en creusant une route assurée dans les entrailles de la terre, on parvient à détruire un ouvrage dont l'assaut couteroit la vie à des milliers de braves soldats qui sont les plus fermes soutiens d'un Empire.

Non contente d'épargner le sang des hommes & de les garantir des injures de l'air, cette science leur procure mille agrémens divers au milieu des commodités essentielles de la vie. Tous les païs où les Mathématiques sont cultivées, se reconnoissent au mélange adroit qui s'y rencontre de l'agréable avec l'utile. Elles façonnent, elles embellissent notre demeure & nous apprennent à la connoître.

En effet, habitans de la terre, quelle étude est plus nécessaire pour nous, quelle connoissance est plus utile que celle du Globe que nous occupons. Louis le Grand de glorieuse mémoire étoit bien convaincu de cette vérité, quand il ordonna à M. l'Abbé Picard de mesurer un dégré d'un grand cercle de la terre pour en déterminer la longueur absolue. De nos jours & tout récemment, le Monarque sous lequel, nous vivons, enchérissant sur l'exemple de son Auguste Bisaïeul, a chargé le célébre M. Cassini de fixer par une suite non interrompue d'opérations Géométriques, la position certaine de toutes les Villes de ce vaste Roïau-

me, par rapport au Meridien de la Capitale. Mais ce n'eſt pas aſſez pour ce grand Prince, de faire contribuer les Mathématiques au bonheur de ſa puiſſante Monarchie : pour y faire participer tous les hommes, il choiſit dans la plus célébre Académie du monde des Géométres profonds, des Sçavans Aſtronomes : il envoie Mrs. de Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, parmi les neiges & les glaces de la Lapponie, déterminer la grandeur d'un dégré du Pole:pendant que Mrs. de la Condamine, Bouguer, & Godin, vont par le même ordre braver les chaleurs exceſſives & continuelles de la Zone Torride, pour meſurer les dégrés du Meridien ſous l'Equateur.

Ces illuſtres Académiciens à leur retour en examinant leurs travaux,en comparant leurs différentes opérations faites dans des lieux ſi oppoſés, détruiſent irrévocablement ce préjugé fameux auſſi ancien que l'Univers, qui ſuppoſoit la terre parfaitement ſphérique. Ils nous démontrent que ce globe eſt un ſphéroïde applati par les Poles & bombé ſous l'Equateur. Découverte qui fera perpétuellement l'éloge de notre ſiécle & des Sçavans à qui elle eſt duë.

Ne croïez pas, MESSIEURS, que cette connoiſſance ſoit peu importante & ſeulement utile à l'amuſement des Philoſophes. Il eſt aiſé de ſentir que la Géographie, l'Hydrographie & la Navigation retireront des avantages infinis de cette expérience, puiſque par ſon moïen on pourra déterminer beaucoup plus préciſément la poſition d'une iſle, d'un port, d'un banc de ſable, d'un rocher : & par conſéquent diminuer le nombre des naufrages, & ſauver la vie & les biens à tant de militaires & de négocians qui ſont la défenſe & la richeſſe des Etats.

Il ne ſuffit pas de connoître la grandeur & la figure de la terre, il faut en déterminer toutes les parties. Aidée par la délicateſſe du deſſein, la Trigonométrie fille de la Géométrie fait dans un court eſpace nous repréſenter avec juſteſſe les Etats les plus vaſtes, les plus peuplés, leurs Provinces, leurs Villes : les plus petits hameaux, les moindres habitations, les montagnes, les chemins, les bois, les fleuves, les ruiſſeaux, un moulin, une écluſe, un arbre, un clocher. Avantages toujours très-conſidérables & dont les militaires ſentent l'importance mieux que perſonne, puiſqu'un Général eſt d'autant plus ſûr de réuſſir dans ſes projets, qu'il connoît mieux le païs où il porte la guerre.

Ces ſervices quelques grands qu'ils ſoient, ne ſont pas les ſeuls que

que les Mathématiques rendent à l'Etat. Pour nous en convaincre, transportons-nous sur les Frontieres de cet Empire. Considerons attentivement ces Forteresses redoutables qui nous garantissent des incursions d'un ennemi ambitieux & entreprenant. Ce fameux Conquerant qui en trois batailles rangées subjugua tout l'Empire des Perses : cet Alexandre, qui, comme un torrent impétueux, ravagea tous les païs qu'il parcourut ; ce fleau de l'Asie, qui, sans autre motif que son ambition pétulante, fit la guerre seulement pour faire la guerre ; ce vainqueur renommé n'eut pas sans doute usurpé le nom de Grand, si les Persans plus instruits eussent eu quelques places à lui opposer. La Fortification nous enseigne à bâtir ces remparts impénétrables qui ferment tout accès aux surprises & mettent nos Soldats à l'abri des sanglans effets que produisent ces globes meurtriers enfantés par le démon de la discorde.

Continuons notre examen, passons sur les côtes de cet Etat qui bordent les deux mers. Nous y verrons ces Ports commodes, où l'art corrigeant ou perfectionnant la nature a sçu former un azile assuré pour un grand nombre de Vaisseaux. Nous y verrons construire ces Bâtimens destinés à siller sur les plaines liquides, soit pour étendre sur cet élement les triomphes de notre Patrie, & répandre dans tout l'Univers la gloire de la Nation : soit pour l'entretenir dans son état florissant par un commerce avantageux & nous procurer tous les agrémens de la vie. Ces importans secours sont encore dûs aux Mathématiques. C'est au moïen de l'Architecture navale & de l'Astronomie, qu'on est parvenu nonseulement à bâtir ces Villes flotantes, mais encore à diriger leur route, regler leur manœuvre & déterminer tous leurs mouvemens.

Rentrons ensuite dans l'intérieur des Provinces. Nous y verrons un nombre prodigieux de canaux qui établissent une communication entre les villes les plus considérables & les plus éloignées, facilitent le commerce & le transport des marchandises, & procurent l'abondance & la fertilité dans les campagnes qu'ils arrosent. Que dis-je ? Nous verrons les deux Mers jointes par un canal aussi prodigieux par sa grandeur que considérable par son utilité, qui nous retracera la magnificence du Prince qui l'a fait construire, & la sublimité de la Science qui en a dirigé l'exécution.

Mais qu'est-il besoin de chercher ailleurs que dans cette Ca-

pitale & dans ces lieux que nos Rois honorent de leur présence auguste des preuves de l'utilité des Mathématiques ? Cette Reine des villes n'en contient-elle pas assez dans sa vaste enceinte ? Ces Palais majestueux, j'oserois presque dire enchantés, ne nous offrent-ils pas assez de merveilles ? Ces Temples sacrés, ces somptueux édifices, ces bâtimens publics & particuliers qui sont toujours présens à nos yeux, ne sont-ils pas l'ouvrage de l'Architecture ? C'est-à-dire d'un Art qui réunit d'autant mieux l'élégance à la solidité, qu'il s'écarte moins des préceptes de la Géométrie & des Proportions ? Ne sont-ils pas des témoins continuels des avantages presque infinis que les Mathématiques procurent à tous les hommes ?

Après tout ce que j'ai dit, il me sera facile de prouver qu'elles sont utiles à chacun en particulier. On sait que loin de s'arrêter à une spéculation infructueuse, cette Science ne donne aucun précepte, sans fournir en même tems les moïens de l'appliquer avec fruit aux choses les plus importantes. Elle détermine les exercices & les travaux militaires, elle est le compas de l'Ingénieur, le guide du Pilote, la base de l'Architecture, la source & le fondement de tous les Arts libéraux.

Cependant, à la honte de notre âge, on voit encore des Artistes, de ceux même qui par état font une application journaliére de ses propriétés merveilleuses, se bornant à en apprendre ce qu'il ne leur est pas permis d'ignorer, préférer une pratique aveugle à la sublimité des principes qui en sont le fondement : & satisfaits de profiter des avantages qu'elle leur procure, négliger de s'instruire des vérités immuables qui les ont fait naître, & dont la prodigieuse fécondité peut en produire une infinité d'autres.

Bien des Savans au contraire s'élevant au-dessus de la pratique la plus nécessaire, la plus indispensable, développent avec soin les principes les plus sublimes & poussant leurs recherches jusques dans l'infini, percent les nuages épais où il semble que la vérité soit cachée ; beaucoup plus utiles sans doute & plus louables que les premiers, puisque chacune de leurs découvertes est un trésor d'où l'Artiste emprunte de nouveaux moïens de rectifier ou de faciliter ses opérations.

Pour vous, MESSIEURS, soit que vous suiviez la profession

des Armes, soit que les Sciences ou les Beaux-Arts fassent l'objet de votre étude : si vous prenez la peine de réunir une théorie profonde à la pratique la plus exacte ; si vous puisez dans les sources intarissables de la premiere, les secours dont la seconde ne peut se passer ; maîtres de l'art & de vous-mêmes, vous saurez à propos varier vos opérations suivant les besoins & les circonstances. Vous n'en ferez aucune dont vous ne puissiez démontrer la justesse avec une évidence capable d'éclairer l'ignorance & de convaincre l'opiniatreté. J'ose le dire, bravant toutes sortes d'obstacles, vous exécuterez les travaux les plus considérables avec autant de facilité que vous en aurez conçu le projet.

Mais une étude refléchie de cette Science procure des avantages bien supérieurs encore & produit des fruits d'une utilité beaucoup plus universelle. Je ne parle point de cet attrait délicieux, de cette satisfaction intérieure que ressentent ceux qui prennent les Mathématiques pour guides dans la recherche de la vérité. Quoique ce sentiment seul soit bien capable de les dédommager de leurs travaux, le succès est au-dessus de leur espérance & surpasse même leurs vœux.

Semblable à une tendre mere qui cultive avec soin les heureuses dispositions qu'elle apperçoit dans son jeune fils, cette Science annoblit, éleve & fixe l'esprit. Elle lui donne toute la justesse & toute l'étendue dont il est capable. Elle développe & fortifie ces rares talens enfans d'un sublime génie, qui, sans elle, resteroient inutiles, ignorés de l'univers & d'eux-mêmes. Elle nous rapproche de notre origine en excitant en nous le goût & l'amour de la vérité. Elle éclaire & dirige notre raison en la délivrant des préjugés qui l'obscurcissent. L'ordre, la précision, la justesse influent sur toutes les actions d'un Géométre, & reglent jusqu'à ses pensées. A la simple exposition d'un raisonnement, l'esprit de combinaison le lui représente sous toutes les faces dont il est susceptible, & lui en fait saisir le principe ou lui en découvre la foiblesse. L'heureuse facilité de réfléchir lui donne une sagacité pénétrante qui dévoile à ses yeux les profondeurs les plus abstruses de toutes les autres Sciences. Leur étude n'a rien d'assez dur, rien d'assez compliqué pour lui faire obstacle. Elles ne sont pour lui que des amusemens.

Quoique ces effets soient reconnus & avoués par ceux-mêmes qui les ressentent le moins, on voit encore bien des gens, qui, dans la crainte de sacrifier les agrémens de l'esprit à sa justesse, se privent volontairement de ces avantages. *Les Mathématiques,* disent-ils, *éteignent l'imagination, ou au moins la resserrent dans des entraves gênantes, & la dépouillent des graces dont la nature l'avoit ornée. L'esprit le plus vif, le plus brillant devient par cette étude un génie borné.* Ce n'est plus un homme qui pense, mais un bœuf qui rumine. *Le Géométre insipide compasse ses idées, nivele ses démarches & toise ses pensées.*

Ce reproche ne mérite de réponse que parce que tout mal fondé qu'il soit, il ést cependant presque universel. Que l'homme est inconséquent! Tantôt vous supposez que les Mathématiques exigent les plus grands efforts de l'imagination : tantôt vous prétendez qu'elles l'éteignent. Soïez d'accord avec vous-mêmes. Est-ce en exerçant l'imagination qu'on peut l'éteindre ? Est-ce en allongeant une courroïe qu'on la raccourcit ? Comprime-t-on un ressort en le lâchant ?

Ces deux sentimens contradictoires sur le même sujet sont si peu compatibles, que pour détruire le second, il suffiroit d'admettre le premier. Je n'hésiterois pas de prendre ce parti si tous les deux n'étoient également faux. Je crois avoir prouvé le peu de fondement de l'un : pour démontrer en deux mots la fausseté de l'autre, je suivrai la route que m'a tracée sur le même sujet un Auteur déja cité *. C'est par des faits plus que par des raisonnemens qu'il faut convaincre ceux qui laissent ensevelir leur raison sous les préjugés.

Dira-t'on que ces grands Philosophes, ces Géométres fameux Auteurs des deux Sistêmes qui partagent encore aujourd'hui les Phisiciens, manquoient d'imagination ? Regardera-t'on comme des esprits lourds ces Naturalistes habiles, ces Mathématiciens profonds, leurs contemporains, leurs disciples & leurs rivaux ? Découvrira-t'on des génies bornés dans quelques-uns des Membres savans de ce Corps célébre dans lequel nous trouvons à la fois nos maîtres & nos modéles ? non sans doute. En examinant ces conséquences, on est révolté contre une opinion si parfaitement démentie par l'expérience, & tout le monde avouera qu'on trouveroit aussi facilement les ténébres au milieu du jour, ou des lâches parmi nos Guerriers.

* M. de la Chapelle.

Je conviendrai bien & je crois l'avoir déja fait entendre, que cette étude change la disposition de nos idées. Elle les transforme (pour ainsi dire) en les rectifiant : mais ce changement même (je le répéte) est un avantage qu'on ne peut jamais assez rechercher. Oui, MESSIEURS, cette étude faite avec goût, prévient & détruit les écarts de l'imagination. Elle est à son égard ce que la raison est à notre conduite. C'est un frein qui l'empêche de s'égarer. C'est un aiguillon qui la presse quand elle veut s'arrêter au milieu de sa course. C'est un creuset qui rafine l'esprit en le dégageant de tout ce qui lui est étranger. C'est un Chimiste aussi habile que généreux, qui ne nous dépouille de notre clinquant que pour le convertir en or.

Ce seroit sans doute un nouvel hidre à combattre que le sentiment de ceux qui en reconnoissant l'utilité des Mathématiques reservent pour notre sexe une étude qu'ils supposent inutile à l'autre. Cette conduite a t-elle sa source dans un intéret personnel ? Est-elle une preuve de notre estime ou une suite de nos ménagemens pour les Dames ? Prétendroit-on que leur esprit aussi juste que délicat parvient sans aucun secours où le notre n'arrive qu'après beaucoup de travail ? Quoique cette opinion ne manque pas de Sectateurs, je crois pouvoir la rejetter sans manquer au respect que je dois aux Dames. Plus elles auront de dispositions, moins elles s'imagineront posséder les Sciences infuses. La nature prépare les matieres, l'art seul peut les mettre en œuvre.

Supposera t-on que par égard pour leur foiblesse, on doit leur épargner des travaux audessus de leurs forces ? N'avons-nous pas des Femmes illustres dans tous les genres ? Les exemples connus qu'il seroit aisé de citer & les épreuves particuliéres que j'ai faites en plusieurs occasions m'ont convaincu que les dispositions sont au moins égales. Rien n'est moins fondé que ce reproche de foiblesse. Je m'étonne qu'un préjugé si contraire à nos mœurs ait pû trouver créance auprès d'une Nation aussi judicieuse que la nôtre. Qui sommes-nous donc, nous François, qui nous glorifions de suivre les impressions de ce sexe prétendu foible & de lui devoir cette politesse qui nous distingue des autres Peuples & qui de toutes nos prétentions est la moins contestée ? Eh, MESSIEURS, par vanité ménageons nos vainqueurs : ne fut-ce que pour diminuer la honte de notre défaite, si toute fois on doit rougir de céder à la douceur qui fait le principal mérite de ce sexe & le charme de la société.

Ce n'est donc que par amour propre ou par jalousie qu'on a exclu les femmes de l'étude des Mathématiques. Serons-nous toujours en opposition avec nous-mêmes? Quoi! nous prétendons assez gratuitement que l'esprit des femmes en général manque de justesse, & nous leur refusons les secours capables de le fixer. Quelle injustice! Je dis plus, notre intérêt personnel exige que l'étude soit commune aux deux sexes, cette proposition se trouve dans plus d'un Auteur : mais fut-elle entierement nouvelle, ce n'est pas chez les François que la nouveauté d'une opinion doit sembler un motif pour la rejetter. Cette nouveauté même, si l'on en croit nos voisins, est un titre suffisant pour nous la faire adopter. Quoi qu'il en soit, quelques réflexions assez simples nous mettront en état de juger de son mérite.

Les deux sexes sont destinés à vivre ensemble; mais leur liaison ne peut subsister qu'autant qu'elle est fondée sur l'estime & qu'elle suppose entre eux une sorte d'égalité. Que la beauté de l'un compense la force de l'autre; à la bonne heure : mais il n'est personne assez aveugle pour penser que l'Auteur de la Nature ait borné le mérite de l'un des deux sexes aux qualités extérieures. La certitude que nous avons de sa justice doit au contraire nous assurer que ce Pere équitable a partagé ses bienfaits également entre eux. Or comment cette égalité se soutiendra-t-elle si l'un des deux abusant du pouvoir qui ne lui a été confié que pour faire le bonheur de l'autre, cesse d'être son Protecteur & devient son Tiran? S'il se reserve le droit exclusif aux qualités essentielles, à toutes les connoissances capables de perfectionner les dons de la Nature, & charge l'autre de ridicules & de frivolités? Oui, MESSIEURS, c'est à nous-mêmes, c'est à la mauvaise éducation qu'on donne aux Femmes que nous devons imputer le peu de capacité que nous leur supposons pour les Sciences. L'esprit n'a point de sexe.

On feroit un raisonnement faux en disant que les Femmes ne sont destinées ni à l'exercice des Arts, ni aux emplois qui exigent des connoissances supérieures. N'ont-elles pas comme vous une ame, un cœur, un esprit? Vous convenez qu'il est nécessaire d'éclairer leur ame par le flambeau de la Religion; pourquoi leur refuser le secours de la Morale pour diriger les mouvemens de leur cœur & celui des Mathématiques pour donner la justesse à leur esprit? C'est le seul moïen de rétablir l'égalité.

Cet équilibre conforme au vœu de la Nature est nécessaire au bonheur des deux Sexes. On ne peut l'assurer sans augmenter l'émulation & contribuer au progrès des Sciences; sans répandre un agrément de plus dans le commerce de la vie, sans se ménager une ressource nouvelle contre l'ennui qui nous assiege. C'est multiplier ses plaisirs; que d'étendre l'empire de la raison.

Vainement m'objecteroit-on que le Térence du dernier siécle a répandu sur les femmes instruites un vernis de ridicule qui ne s'effacera jamais. Cet Auteur étoit lui-même trop éclairé pour jouer les femmes qui se distinguent par leurs talens. Quelle est la fable de son Poëme? Il veut prouver, comme il le fait dire par son *Clitandre*, que *de deux sots, le plus savant est le plus sot*. Qu'on y prenne garde. Les *Vadius* & les *Trissotins* de son tems qui éblouissent par de grands mots des femmes vraiment ignorantes: l'abus que font ces mêmes femmes de termes dont elles ne connoissent pas la valeur: l'affectation & la sotise de ces pédans des deux sexes forment la base & le jeu de sa Comédie. Il devoit donc l'intituler *Les Pédants*, puisque le titre de *Femmes Savantes* ne convient en aucune maniére aux *Philamintes* & aux *Bélises* qu'il y introduit. Mais ce titre n'auroit pas intéressé la multitude. Le point capital étoit de lui plaire; le succès de sa piéce en dépendoit: & dans cette occasion, comme dans quelques autres, Moliere s'est vû contraint de sacrifier la raison à l'intérêt.

Quand on supposeroit pour un moment qu'entrainé par le préjugé, Moliere a réellement prétendu ridiculiser les femmes qui sortant de la létargie où notre injustice les a plongées, se rendent célébres par leurs lumieres: Qu'en résulteroit-il? Je n'y vois pour elles aucun sujet de honte. Pourrions-nous en dire autant de l'écrivain? Socrate étoit un grand-homme. Le fut-il moins après qu'Aristophane l'eut joué? Réfléchissez-y, MESSIEURS, & prononcez.

Je pourrois appuïer tout ce que j'ai dit sur une longue suite d'exemples & de faits mémorables: mais je vous crois, MESSIEURS, assez convaincus de ces vérités, & pour ne point abuser de votre complaisance, je conclurai de ce que je viens d'avoir l'honneur de vous exposer, que dans toute condition & à tout âge, rien n'est plus *facile* & plus *avantageux* aux deux sexes que l'étude d'une Science aussi simple que sublime, révérée de tous les temps, cultivée par les Savans de

tous les siécles, capable de fixer, de nourrir & de satisfaire l'esprit & propre à former le bon citoïen.

Munis de ses secours, vous parviendrez sans peine au but légitime de vos soins. Vous deviendrez de plus en plus utiles à votre patrie. Quel honneur, MESSIEURS, pour de zélés citoïens, que celui de se consacrer sans réserve au bonheur de la nation, à laquelle on est d'autant plus redevable qu'on s'est rendu plus nécessaire? Qu'il est flatteur pour eux de remplir les devoirs qu'elle exige de ses enfans, & de pouvoir se rendre à soi-même un témoignage satisfaisant des avantages qu'on procure à la societé dont on est membre, en contribuant à son ornement, à sa deffense, ou à sa grandeur! Mais combien cette gloire est-elle encore plus sensible, quand on a, comme nous, le bonheur de vivre sous un Monarque équitable, éclairé, bienfaisant: plus grand par lui-même que par son Trône & ses Victoires: qui, aussi magnanime dans le sein de la Paix, que formidable dans les horreurs des combats, moins jaloux des hommages dûs à son rang suprême que de l'amour de ses sujets, ne veut imprimer de terreur que sur le front de leurs ennemis? Qui, Emule d'Auguste, met, comme lui, sa gloire à se voir qualifié de PERE DE LA PATRIE: titre qu'il mérite d'autant mieux, qu'il posséda toujours les vertus du Second des Césars, & qu'il n'en a jamais imité les fureurs.





ESSAIS SUR LES MATHEMATIQUES.

INTRODUCTION AUX MATHEMATIQUES.

Définition & Division des Mathématiques.

1 UN Corps de Sciences les plus certaines, les plus vastes, & peut être les seules des sciences humaines qui soient véritablement connues, compose ce que nous appellons *Mathématiques*, & que l'on définit *la Science de la grandeur ou de la quantité.*

2 On entend par *grandeur* ou *quantité* tout ce à quoi l'on peut ajouter, & d'où l'on peut retrancher quelque chose. Ainsi l'étendue, le mouvement, la durée, la lumiere, la pesanteur, la force, les sons, la dureté, le froid, le chaud, tout ce que nous connoissons soit par l'impression des sens, soit par la simple vûe de l'esprit, tout ce qui existe ou peut exister dans la nature : tout cela fait l'objet des recherches des Mathématiques, en ce que chacune de ces choses peut être conçue plus grande ou plus petite ; c'est-à-dire, que,

Dieu seul excepté, tout ce que nous pouvons imaginer d'ailleurs étant susceptible de plus & de moins, est par conséquent aussi du ressort des Mathématiques : parce qu'il n'y a que Dieu seul qui ne puisse recevoir d'accroissement ou d'altération.

La possibilité du plus & du moins qui caractérise essentiellement la quantité, convenant également à la multitude infinie des diverses grandeurs, on doit distinguer les propriétés qui sont communes à tout le genre, d'avec celles qui sont singuliéres à chaque espèce séparément prise. On doit même s'appliquer à connoître ce qui convient à toutes en général avant de passer aux propriétés curieuses & intéressantes de chacune en particulier.

En vuë de cet ordre, on divise les Mathématiques en générales & particulieres.

3 Dans les *Mathématiques générales* on examine ce qui concerne également toutes les quantités prises seulement comme quantités ; c'est-à-dire, qu'on y considère la grandeur en elle-même en faisant abstraction des qualités propres de chaque espèce. Par exemple, on opérera sur deux ou plusieurs quantités, sans s'embarrasser si elles expriment des toises, des livres, des jours, ou toute autre sorte de grandeur.

4 Après avoir appris ce qui convient en général à toutes sortes de quantités, on cherche à découvrir dans les *Mathématiques particuliéres*, ce qui constitue chaque espèce distincte, relativement à la nature de chacune. On étudie les propriétés de l'étendue ; les loix de l'équilibre, les principes du mouvement, &c.

On subdivise les Mathématiques générales en deux principales parties, qui sont, le Calcul & l'Analyse.

Le *Calcul*, est la science des plus simples propriétés des grandeurs & des opérations qu'on peut faire sur elles.

Il nous convaincra que des grandeurs assez opposées pour se détruire mutuellement, sont cependant également réelles, également vraies. Nous y verrons de quelle manière on doit assembler, défunir, multiplier & diviser les quantités : comment on les éleve à differens dégrés, & comment les plus composées sont réduites à leur dernière simplicité.

Par l'*Analyse* nous découvrirons les rapports inconnus de toutes sortes de grandeurs, & nous résoudrons toutes les questions que l'on peut faire à leur sujet.

Cette partie se subdivise naturellement en deux autres, qui sont ; l'Analogie & la solution des équations.

Dans toutes les questions que l'on propose, il y a des quantités

connues & des quantités inconnues. Si toutes étoient connues, il n'y auroit point de question : Si toutes étoient inconnues, il n'y en auroit pas davantage. L'Analyse n'enseigne point à deviner, elle enseigne seulement à découvrir des rapports inconnus par le moïen des rapports connus : mais ces rapports cherchés peuvent être plus ou moins simples, plus ou moins composés.

Lorsqu'on connoît le rapport que doit avoir une grandeur qu'on se propose de découvrir avec une autre grandeur connue, ou avec plusieurs qui peuvent être réduites à une seule, alors on résout la question par *l'Analogie* qui est la science des rapports qui se trouvent entre les grandeurs de même espèce.

Nous reconnoîtrons dans l'Analogie qu'il n'y a rien de grand ou de petit par soi-même; que la comparaison habituelle des choses differentes nous induit seule à affirmer qu'une telle chose est grande ou petite, parce qu'intérieurement nous la considérons relativement à telle autre plus petite ou plus grande. Nous y apprendrons les usages infinis de la fameuse regle de trois ou regle d'or, que la plûpart des Arithméticiens présentent successivement sous quinze ou vingt differens titres, qu'on peut reduire au seul nom de regle de proportion.

Pour donner une idée de ce principe qui est l'ame du commerce, & qu'on peut regarder comme le plus important des Mathématiques, supposons que le cadran d'une pendule ayant vingt-deux pouces de circonférence, l'aiguille (que nous concevons prolongée jusqu'aux bords de ce cadran) ait sept pouces de longueur : & qu'on demande quelle doit être la longueur de l'aiguille d'un autre cadran dont le contour est de cent dix pouces : il n'est personne qui ne sente que la seconde aiguille qui doit atteindre aux extrêmités d'un cadran plus grand, sera plus grande que la première. Et si l'on suppose que chaque aiguille ait un même rapport avec son cadran, on appercevra facilement que la circonférence du second cadran étant cinq fois aussi grande que celle du premier, il faut que la seconde aiguille soit cinq fois aussi longue que la première, & qu'elle aura par conséquent trente-cinq pouces.

Mais lorsque la découverte d'une ou de plusieurs quantités cherchées dépendra de differens rapports avec plusieurs autres quantités, & que ces rapports ne pourront être réduits à un seul; alors pour résoudre la question, on en exprimera les differentes conditions par autant de comparaisons, dont la solution fournira la réponse à la difficulté proposée.

Par exemple, si l'on demande combien de fois & dans quels points du cadran l'aiguille des minutes rencontrera celle des heures pen-

dant une révolution entière de l'aiguille des heures ; cette question, l'une des plus simples de l'Analyse, paroîtra plus difficile en n'emploïant que le raisonnement ; cependant avec un peu d'attention, tout le monde sera en état de la résoudre.

On sait que l'aiguille des minutes fait douze révolutions, pendant que celle des heures en fait une. Ainsi ces deux aiguilles se rencontrent onze fois en douze heures. Pour déterminer les points de leurs rencontres, nous remarquerons que 1°. Elles partent en même-tems du point de midi. 2°. A une heure l'aiguille des minutes est revenue sur midi, & l'aiguille des heures est sur une heure. 3°. Dans les cinq minutes qui suivent, l'aiguille des minutes arrive sur une heure, & celle des heures qui a continué son mouvement, a parcouru la douziéme partie de l'intervalle qui se trouve entre une heure & deux, l'aiguille des heures n'a donc sur l'autre que l'avance de cette douziéme partie. Mais celle des minutes l'atteindra bientôt ; car à une heure six minutes, l'aiguille des heures n'ayant encore parcouru que la dixiéme partie de la distance entre une heure & deux, celle des minutes en a parcouru la cinquiéme partie, & par conséquent l'aiguille des heures est alors également éloignée de l'aiguille des minutes & du point d'une heure qu'elles ont passé toutes deux. Ces deux aiguilles se sont donc rencontrées entre une heure cinq minutes & une heure six minutes.

La vitesse des deux aiguilles restant toujours la même, on sent bien que d'une rencontre à la suivante, il s'écoulera toujours un même espace de tems. Par conséquent si ces deux aiguilles s'étoient rencontrées à une heure cinq minutes, elles se rencontreroient à deux heures dix minutes, à trois heures quinze minutes, à quatre heures vingt minutes, &c. & enfin, à onze heures & onze fois cinq minutes, ou cinquante-cinq minutes. Mais nous savons qu'elles mettent un peu plus de tems à se rejoindre. Nous savons aussi que leur onziéme rencontre se fera au point de douze heures. Donc les cinq minutes qui restent dans la supposition, doivent être également distribuées sur chacun des espaces égaux parcourus d'une jonction à l'autre par les deux aiguilles. Il faudra donc à chacun des intervalles supposés d'une heure cinq minutes, ajouter la onziéme partie de cinq minutes, pour avoir la détermination éxacte des points de rencontre.

Un Calcul très-simple & très-court nous auroit appris la même chose ; car en réduisant en secondes les douze heures qui composent une révolution, & divisant le nombre de ces secondes par le nombre des rencontres des deux aiguilles, on auroit eu pour chaque

intervalle une heure cinq minutes, vingt-ſept ſecondes, trois onziémes : mais ici le Calcul eût été déplacé ; le raiſonnement ne peut jamais l'être.

La ſolution que l'Analyſe donneroit de cette queſtion ſeroit encore plus ſimple, mais beaucoup plus utile, en ce qu'elle ſeroit applicable à une infinité de cas differens.

Nous venons de voir (2) qu'il y a une multitude infinie d'eſpèces differentes de grandeurs ; par conſéquent on peut ſuppoſer les Mathématiques particuliéres diviſées en autant de parties diſtinctes les unes des autres : mais comme ce travail n'eſt pas fait, & que probablement il ne le ſera jamais, ceux qui pénétrent le plus avant dans les Mathématiques, ſe contentent aſſez ordinairement d'en étudier les principales parties, & qui juſqu'à préſent ſont auſſi les plus connues.

La première, la baze de toutes les autres qui empruntent d'elle l'eſprit d'ordre, la clarté, l'exactitude, eſt la *Géométrie* ou la ſçience de l'étendue conſiderée ſuivant ſa longueur, ſa largeur & ſa profondeur.

La Trigonométrie qui n'eſt autre choſe qu'une application de quelques principes de la Géométrie au toiſé, eſt l'Art de meſurer toutes ſortes de diſtances acceſſibles ou inacceſſibles.

Par le moïen de *la Géodeſie*, autre ſuite de la Géométrie, on réuſſit à partager une piéce de terre en deux ou pluſieurs parties, ſuivant des conditions propoſées.

Le Nivellement nous enſeigne à trouver de combien un lieu eſt plus ou moins éloigné que l'autre du centre de la terre : à donner aux eaux la pente qui leur eſt néceſſaire pour leur conduite ou leur écoulement : & à calculer la hauteur & la ſolidité des montagnes les plus élevées & les plus irréguliéres.

La Mécanique qui contient la *Dynamique*, la *Statique*, l'*Hydraulique* & l'*Hydrotaſtique*, nous apprend les loix du mouvement & de l'équilibre de tous les corps ſolides & liquides. Elle nous enſeigne à conſtruire les machines qui en facilitent l'exécution, ſoit en multipliant ou en continuant les effets d'une force qui leur eſt appliquée.

La Phyſique expérimentale recherche les cauſes de ce qui ſe paſſe dans la Nature, en appuïant ſes raiſonnemens ſur l'expérience & ſur les Mathématiques. A l'égard de la Phyſique générale, les ſujets dont elle traite ne ſont point de notre reſſort. Ses principes la plûpart applicables au pour & au contre, ne ſimpatiſent aucunement avec l'ordre & l'eſprit Géométrique, qui doit regner dans toutes les Mathématiques.

La Coſmographie conſidère le détail, l'ordre & l'arrangement des

parties de l'Univers, ou la *Sphere*; le cours, le mouvement & la situation réciproque des Astres, ou l'*Astronomie*; & la disposition rélative de toutes les differentes parties de la terre & de l'eau; c'est-à-dire, la *Géographie* & l'*Hydrographie*.

La Gnomonique est l'art de tracer des Cadrans Solaires & Lunaires sur des surfaces planes ou courbes, verticales, horisontales ou inclinées.

L'Architecture Civile donne l'art de construire les differens Edifices dont une Ville est composée & ornée.

L'Architecture Militaire apprend l'art de fortifier, de défendre & d'attaquer les Places.

L'Architecture Navale regle la construction & la manoeuvre des Vaisseaux.

L'Architecture Hydraulique a pour objet les Ponts, Chaussées, Fontaines, Aqueducs & Canaux.

L'Optique traite de la théorie de la vuë, des raïons visuels & des differens effets produits par les réflexions & réfractions de la lumière. Elle enseigne aussi l'art de représenter les objets sur une surface plane, comme ils paroissent sur le terrein : ce qu'on appelle la *Perspective*, regle immuable de la Peinture.

L'Acoustique est la science du son; c'est par son moïen que nous apprenons comment la percussion de l'air produit des sons qui se réfléchissent dans nos oreilles, & tous les accords possibles que les differens sons peuvent former entre eux : ce qui n'est autre chose que les principes invariables de la *Musique*, soit *vocale*, soit *instrumentale*.

Enfin, la *Pyrotechnie* nous enseigne la composition & l'usage de la poudre à canon, & de toutes sortes de feux d'artifice, tant pour les spectacles que pour la guerre.

Telles sont les principales parties d'entre les Mathématiques particuliéres, dont chacune se divise & se subdivise encore en beaucoup d'autres qu'il est inutile de détailler ici.

Mais comme il y a certains termes d'usage dans les Mathématiques, & quelques premiers principes évidens, d'où dépend l'intelligence de ceux qui sont plus compliqués, il est nécessaire de s'instruire des uns & des autres avant de passer aux Mathématiques générales.

DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DES MATHÉMATIQUES.

LES *Principes généraux des Mathématiques* sont des vérités claires, des conventions simples, & des propositions évidentes sur lesquelles on établit les démonstrations des autres propositions.

Il y a trois sortes de Principes généraux, qui sont les Définitions, les Axiomes & les Demandes.

La Définition eſt une explication ou déclaration de ce qu'on entend par un mot dont on veut faire uſage ; on s'en ſert pour abréger le diſcours & pour éviter les équivoques. Ce qui précede (1, 2, 3, 4, &c.) & ce qui ſuit eſt preſque rempli de Définitions. Cet article & le ſuivant ne contiennent pas autre choſe que des Définitions, ou pour ainſi dire, des conventions ſemblables.

Les Axiomes ſont des Propoſitions dont la vérité eſt ſi évidente, qu'elle n'a pas beſoin d'être démontrée : ce ſont des vérités inconteſtables. Auſſi loin d'exiger des preuves, ils ſont au contraire les derniéres preuves des autres propoſitions. Par exemple, tout le monde conviendra que de deux lingots d'un même métal, le plus grand contient plus de matiére que le plus petit.

Les Demandes ſont des propoſitions ou des pratiques ſi ſimples & ſi faciles à entendre ou à exécuter, qu'on ſe contente ordinairement de les ſuppoſer. Par exemple, ſi pour donner à quelqu'un une idée de la ſituation d'une maiſon de campagne qu'on auroit vuë, on en traçoit le Plan ſur le ſable, & qu'on lui dît : *Ce carré repréſente le bâtiment, ceci eſt une grande allée, là c'eſt un baſſin circulaire, ici un boſquet ovale*, &c. Celui à qui l'on parleroit de la ſorte auroit-il bonne grace d'objecter que dans les figures qu'on lui trace, il ne voit ni carré, ni rond, ni ovale ? Il en eſt de même des demandes Mathématiques. Pour fixer l'attention de l'eſprit par des images ſenſibles, il eſt à propos de tracer les figures dont on explique les propriétés. Si quelqu'un venoit dire, *votre ligne n'eſt pas droite, votre cercle n'eſt pas rond ; je le ſais*, lui répondroit-on, *auſſi n'eſt-ce pas de cette figure dont il s'agit : Je parle de celle que vous devez concevoir, & dont celle-ci peut n'être qu'une mauvaiſe repréſentation ; il me ſuffit de la ſuppoſer bonne.*

DEFINITIONS GÉNÉRALES.

L*A Propoſition* eſt l'énoncé du jugement de notre ame. Lorſqu'après avoir comparé deux grandeurs, j'affirme que l'une eſt plus grande que l'autre, j'exprime le jugement qui réſulte de la comparaiſon que j'en ai faite, ce jugement eſt une propoſition.

En Mathématiques une propoſition eſt un principe que l'on établit ; & le corps entier, mais inépuiſable de toutes ces propoſitions, compoſe la ſçience des Mathématiques.

Toutes ces propoſitions doivent être démontrées.

La Démonſtration eſt un raiſonnement que l'on fait enſuite d'une propoſition pour en prouver la vérité. Elle doit éclairer & convaincre.

Si j'ai avancé qu'une ligne droite eſt la plus courte qu'on puiſſe

tirer d'un point à un autre point, je démontrerai cette propoſition en prouvant que toute autre ligne ſera plus longue, ou ne differera pas de la première.

On diſtingue en Mathématiques trois ſortes de propoſitions, les Théoremes, les Problêmes & les Corollaires.

Le Théoreme eſt une propoſition de théorie, dont il faut démontrer la vérité. Par exemple, *deux lignes droites ne peuvent renfermer un eſpace.*

Le Problême eſt une propoſition de pratique dont on doit démontrer la juſteſſe. Quand on enſeigne à tracer un cercle, à conſtruire un carré, ou à faire quelque figure que ce ſoit, on donne des Problêmes.

Le Corollaire eſt une conſéquence que l'on tire d'un Théoreme ou d'un Problême déja démontré. Si j'ai prouvé que deux lignes droites ne peuvent pas renfermer un eſpace, j'en conclurrai par Corollaire, *qu'un eſpace quelconque ne peut être enfermé par moins de trois lignes droites.*

Il arrive quelquefois qu'on démontre un Théoreme, ou qu'on réſout un Problême, ſeulement pour parvenir à la démonſtration d'un Théoreme ou à la ſolution d'un Problême plus compliqué; enſorte que cette propoſition eſt hors de ſa place, & pour ainſi dire iſolée. Dans ce cas on donne à cette propoſition le nom de *Lemme.*

Les Anciens appelloient *Scholie* un Diſcours ſommaire ou une courte récapitulation de quelques vérités importantes déja démontrées, pour en faire voir l'uſage & l'application. C'eſt ce qu'on appelle aujourd'hui une *Remarque.*

Les grandeurs qu'on conſidère comme n'ayant rapport à aucun objet particulier, ſont nommées *grandeurs* ou *quantités abſtraites.*

On appelle au contraire *quantités concretes* ou *grandeurs concretes*, celles qui ſont déterminées à une eſpèce particuliére.

Ainſi le nombre *trois* pris en lui-même eſt un nombre abſtrait; mais il devient concret ſi on lui fait exprimer trois toiſes, trois livres, &c.

Des quantités que l'on peut comparer enſemble, ſont des *quantités* de même eſpèce ou *homogenes* : Au contraire, on nomme *grandeurs hétérogenes* ou de differente eſpèce, celles qui n'ont entre elles aucun rapport. Il eſt aiſé de ſentir qu'on ne peut pas faire la comparaiſon d'un tas de bled avec un mois, ni d'un jour avec un écu; parce que l'étendue, la durée & la monnoïe ſont des quantités hétérogenes. Mais on trouvera fort bien le rapport d'un muid à un ſeptier, d'un mois à un an, d'un écu à un loüis, parce que ces grandeurs ſont homogenes chacune à chacune.

On appelle *Propriété*, ce qu'une choſe eſt en elle-même & ſans comparaiſon avec aucune autre.

On

On nomme *Rapport* la manière d'être d'une chose, rélativement à quelqu'autre à laquelle on la compare.

Par exemple, être composé de corps & d'ame, est une propriété qui appartient à tout homme. Quand il n'en existeroit qu'un seul, il n'en auroit pas moins cette propriété : mais il ne pourroit être Roi, Père, Ami, Concitoïen ; parce que ces qualités ne peuvent se trouver dans un homme que par rapport à d'autres hommes qui soient ses Sujets, ses Fils, ses Amis, ses Concitoïens.

Une quantité que l'on regarde comme composée de l'assemblage de plusieurs quantités plus petites, s'appelle un *Tout*.

Une *Partie* est une quantité que l'on considère comme entrant dans la composition d'un tout plus grand.

La même grandeur peut donc être prise tantôt comme un tout, & tantôt comme une partie, selon qu'on la comparera à une autre quantité plus petite ou plus grande.

Un tout qui contient sa partie plusieurs fois exactément & sans reste, est appellé *Multiple* de cette partie : & la partie contenue exactement & sans reste dans son tout, se nomme *Aliquote* de ce tout. Par exemple, douze est multiple de deux, de trois, de quatre & de six, ses aliquotes; mais il est lui-même aliquote de tous ses multiples, vingt-quatre, trente-six, quarante-huit, soixante, &c.

Les Multiples & les Aliquotes prennent differens noms assez connus, qui expriment la manière dont les touts contiennent leurs parties.

Un Multiple qui contient son Aliquote deux fois, s'appelle *Double*, on le nomme *triple*, *quatruple*, *quintuple*, *sextuple*, *septuple*, *octuple*, *noncuple*, *décuple*, s'il la contient trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf ou dix fois.

Reciproquement l'Aliquote contenue deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf ou dix fois dans son Multiple, est appellée *sous-double*, *sous-triple*, *sous-quatruple*, *sous-quintuple*, *sous-sextuple*, *sous-septuple*, *sous-octuple*, *sous-noncuple*, ou *sous-décuple* de son Multiple.

De tous ces noms le dernier seul & les trois premiers sont les plus usités. Soixante, par exemple, est double de trente, triple de vingt, quatruple de quinze, &c. & décuple de six. Par la même raison six est sous-décuple de soixante, sous-double ou moitié de douze, sous-triple ou tiers de dix-huit, sous-quatruple ou quart de vingt-quatre, &c.

AXIOMES GÉNÉRAUX.

I.

UNe même chose ne peut pas être & n'être pas en même-tems.

I I.

De quelque chofe que ce foit l'affirmation ou la négation eft vraïe.

I I I.

Un tout eft égal à toutes fes parties prifes enfemble.

I V.

Après avoir ôté toutes les parties d'un tout, il ne refte rien.

V.

Un tout eft plus grand qu'aucune de fes parties.

V I.

Si d'une grandeur aïant ôté une grandeur, il ne refte rien, ces deux grandeurs font égales.

V I I.

Si à des grandeurs égales on ajoute d'autres grandeurs égales, les touts qui en réfulteront feront égaux.

V I I I.

Si à des grandeurs égales d'autres grandeurs étant ajoutées, il en réfulte des touts égaux, les grandeurs ajoutées font égales.

I X.

Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les reftes feront égaux.

X.

Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les totalités feront inégales avec la même difference.

X I.

Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les reftes feront inégaux avec la même difference.

XII.

Deux grandeurs égales à une troisiéme, sont égales entre elles.

XIII.

Deux grandeurs qui surpassent une troisiéme d'un excès égal, sont égales entre elles.

XIV.

Deux grandeurs qui sont surpassées par une troisiéme d'un excès égal, sont égales entre elles.

XV.

Deux grandeurs qui contiennent également une troisiéme, sont égales entre elles.

XVI.

Deux grandeurs qui sont également contenues par une troisiéme, sont égales entre elles.

XVII.

Si trois grandeurs sont telles que la première soit plus grande que la seconde, & la seconde plus grande que la troisiéme, la première sera à plus forte raison plus grande que la troisiéme.

XVIII.

Si trois grandeurs sont telles que la première soit plus petite que la seconde, & la seconde plus petite que la troisiéme, la première sera à plus forte raison plus petite que la troisiéme.

DEMANDES GÉNÉRALES.

On demande qu'il soit permis d'attacher telle ou telle idée à tel ou tel caractère, à telle ou telle figure.

Que le même caractère change de valeur en changeant de place.

Que l'on puisse disposer les caractères de telle ou telle façon, selon l'occasion & l'avantage de breveté ou de facilité.

Qu'il soit permis de nommer une grandeur par une ou par plusieurs lettres de l'Alphabet.

Que les grandeurs égales ou de même nature ſoient exprimées par des lettres ſemblables, ſi cela eſt utile pour une démonſtration.

Que les grandeurs inégales ou de nature differente ſoient exprimées par des lettres differentes.

Lorſque pluſieurs grandeurs ſont égales, qu'il ſoit permis de prendre l'une au lieu de l'autre.

Qu'il ſoit permis de ſuppoſer une choſe faite & de la regarder comme telle, lorſqu'il eſt inutile de la faire.





ESSAIS
SUR LES
MATHEMATIQUES.

PREMIERE PARTIE.
MATHEMATIQUES GENERALES.

LIVRE PREMIER
DU CALCUL.

5 LE *Calcul* est la Sçience des plus simples propriétés des grandeurs & des opérations qu'on peut faire sur les quantités.

Il y a deux sortes de Calcul en usage dans les Mathématiques, sçavoir l'Arithmétique & l'Algebre.

CHAPITRE PREMIER.
De l'Arithmétique du premier Dégré sur les Nombres entiers.

6 L'*Arithmétique* est la Sçience des nombres.

7 Le *Nombre* est le rapport abstrait & précis d'une quantité d'un certain genre, avec une autre quantité de même genre prise pour l'unité.

8 Par *unité* nous entendons une mesure fixée par l'usage ou autorisée par les Loix, & que l'on a prise pour terme de comparaison dans chaque genre de quantité. C'est ainsi que pour mesurer l'étendue, on a choisi la toise, on a établi la livre de seize onces pour apprécier la pésanteur, la livre de vingt sous sert à compter la monnoie, & le jour de vingt-quatre heures est la mesure à laquelle on rapporte la durée.

Une collection d'unités, ou une partie de l'unité est souvent prise elle-même pour unité, selon la manière d'envisager les grandeurs. Par exemple, on dit une perche, une lieue, un dégré; un quintal, un milier; un écu, une pistole, un louis; une semaine, un mois, un an: De même on dit aussi un pied, un pouce, une ligne; une once, un gros, un grain; un sol, un denier; une heure, une minute, une seconde; mais comme ces differentes unités ont chacune dans leur genre un rapport exact & connu avec l'unité principale de même genre, & qu'on sçait toujours dans un Calcul de quelle unité il s'agit, il n'est point à craindre que leur multiplicité puisse causer d'équivoque.

On distingue trois differentes sortes de nombres, selon les trois differentes sortes de rapports que les quantités peuvent avoir avec l'unité à laquelle on les compare: ces trois sortes de nombres sont les nombres entiers, les nombres fractionnaires que l'on appelle plus communément fractions, & les nombres mixtes.

9 Les *Nombres entiers* sont ceux qui contiennent une ou plusieurs unités, comme un, deux, trois, dix, vingt, trente, cent, mil, &c.

10 Les *Fractions numériques* sont des nombres qui contiennent une ou plusieurs parties Aliquotes de l'unité, comme un-demi, un-tiers, un-quart, deux-cinquiémes, trois-septiémes, neuf-onziémes, quatorze-quinziémes, &c.

Les *Nombres mixtes* sont composés d'entiers & de fractions: tels sont les nombres dix-&-un-quart, douze-trois-quarts, douze-&-demi, quinze-deux-tiers, &c. mais comme on peut toujours réduire les nombres mixtes en fractions, & qu'on les calcule comme des fractions, cette dernière espèce de nombres n'a pas besoin d'un calcul à part, & rentre dans celui des fractions; ainsi nous diviserons l'Arithmétique en deux parties seulement, relativement à ces deux sortes de nombres, sçavoir l'Arithmétique des nombres entiers, & l'Arithmétique des fractions.

DE LA NUMÉRATION.

11 LA *Numération* est l'art d'exprimer les quantités par les nombres.

On se sert en Arithmétique de dix caractères qu'on appelle *chifres.*

Ces caractères sont :

Figures.		Valeurs & expressions.
1	qui vaut & se lit	un.
2		deux.
3		trois.
4		quatre.
5		cinq.
6		six.
7		sept.
8		huit.
9		neuf.
0		zero ou rien.

Les neuf premiers sont appellés *Chifres réels*, le dixiéme sera nommé *Chifre nul.*

Chaque chifre réel a deux valeurs, qu'on appelle fixe & locale.

12 On appelle *valeur fixe* celle que le chifre réel tire de sa figure. Cette valeur est invariable, parce que chaque chifre réel conserve toujours & par tout la même valeur fixe.

13 On appelle *valeur locale* celle que le chifre réel tire de la place ou du rang où il se trouve. Cette valeur change autant de fois que le chifre réel change de place, c'est-à-dire qu'il est suivi d'un plus grand ou d'un plus petit nombre de chifres.

Le chifre nul qu'on appelle ordinairement *zero*, n'a nulle valeur, mais il a deux usages qui facilitent beaucoup la numération.

Le premier est d'exprimer le néant ou le rien.

Le second est d'avancer les chifres réels, & les placer dans leur valeur locale, sans ajouter à la quantité qu'ils doivent représenter.

14 Tout chifre réel vaut à la première place à droite le nombre d'unités exprimé par sa figure ; à la seconde place il vaut dix fois autant, c'est-à-dire, qu'il vaut autant de dizaines que sa figure exprime d'unités ; à la troisiéme place il vaut cent fois autant, c'est-à-dire, qu'il exprime autant de centaines qu'il vaudroit d'unités à la première place, ou de dizaines à la seconde ; & croissant toujours ainsi en progression décuple à mesure qu'il s'éloigne du premier à droite, il vaut par tout dix fois autant qu'il vaudroit au rang qui le précède à droite, & n'est que la diziéme partie de ce qu'il seroit au rang qui le suit à gauche.

Lorsqu'une quantité numérique a plus de trois chifres, pour la nombrer plus aisément, on la sépare par de petites virgules de trois en trois caractères en commençant par la droite.

On appelle *Ternaire* chaque tranche de chifres ainsi séparés. Par conséquent chaque ternaire est composé d'unités, de dizaines & de centaines, & on donne à chacun de ces ternaires le nom de la plus petite espèce qui y est contenue : ainsi le premier ternaire à droite s'appelle *le ternaire des unités*; le second, *des milles*; le troisiéme, *des millions*; le quatriéme, *des billions*; le cinquiéme, *des trillions*, &c. Par exemple, dans le nombre 459, 687, le ternaire 687 est nommé le ternaire des unités, & le ternaire 459 est appellé le ternaire des milles.

Si l'on avoit un nombre fort grand, par exemple, le nombre 456,798, 543, 241, 892, on remarquera que ce nombre est composé de cinq ternaires, dont le premier à droite sera le ternaire des unités; le second, celui des milles; le troisiéme, celui des millions; le quatriéme, celui des billions; & le cinquiéme celui des trillions : de sorte que pour nombrer on dira; *unités, dizaines, centaines; milles, dizaines de mille, centaines de mille; millions, dizaines de millions, centaines de millions; billions, dizaines de billions, centaines de billions; trillions, dizaines de trillions, centaines de trillions* : ensuite dequoi on nommera ce nombre comme il doit l'être, en lisant quatre-cent-cinquante-six trillions, sept-cent-quatre-vingt-dix-huit billions, cinq-cent-quarante-trois millions, deux-cent-quarante-&-un-mil-huit-cent-quatre-vingt-douze, comme on le peut voir dans l'échelle de numération qui suit.

Ternaires des

Trillions			Billions			Millions			Milles			Unités		
4	5	6,	7	9	8,	5	4	3,	2	4	1,	8	9	2.
centaines de trillions.	dizaines de trillions.	unités de trillions ou trillions.	centaines de billions.	dizaines de billions.	unités de billions ou billions.	centaines de millions.	dizaines de millions.	unités de millions ou millions.	centaines de mille.	dizaines de mille.	unités de mille ou milles.	centaines.	dizaines.	unités.

S'il se trouvoit un plus grand nombre de chifres, (ce qui arrive rarement) on continueroit à séparer de trois en trois chifres, & nommant

nommant chacun des chifres de chaque ternaire du nom qui lui conviendroit selon son rang : on appelleroit les ternaires qui suivroient celui des trillions, *ternaires des quatrillions, des quintillions, des sextillions, des septillions, des octillions, des novillions, des décillions, &c.*

REMARQUES.

D'Après ces principes nous pourrons aisément découvrir combien on a abrégé l'expression des nombres, en donnant aux chifres une valeur locale en quoi consiste tout l'artifice de la numération.

1°. Selon ce que nous avons vû (11) les caractères 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, expriment le néant & les nombres entiers d'un seul chifre.

2°. Si à chacun des chifres réels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pris l'un après l'autre, on joint de suite le chifre nul & les chifres réels qui expriment les neuf premiers nombres entiers, on aura une suite de nombres depuis 10 jusqu'à 99, qui comprendra tous les nombres entiers qui peuvent être représentés par deux chifres.

3°. En continuant d'ajouter la première suite 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, à la suite qu'on aura trouvée la dernière, on aura tous les nombres de 3 chifres, tous les nombres de 4, de 5, de 6, &c. chifres.

4°. Dans chacune de ces suites le premier nombre sera un nombre décimal, c'est-à-dire, un nombre qui n'aura que le seul chifre réel 1 qui exprime l'unité, suivi d'un ou de plusieurs chifres nuls ou de zeros. Ce seul chifre réel 1 sera suivi d'autant de zeros qu'il y a de caractères à chacun des nombres de la suite précédente ; & le dernier sera toujours composé d'autant de 9 qu'il y a de caracteres à chacun des nombres de la suite dont il s'agit. Dans la troisiéme suite le premier nombre est 100, & le dernier 999, la quatriéme commence par 1000, & finit par 9999, la cinquiéme va de 10000, à 99999, &c.

5°. Chacune de ces suites contient dix fois autant de nombres que la précédente. Par exemple, la première suite contient 9 nombres; la seconde en contient 90; la troisiéme 900; la quatriéme 9000; la cinquiéme 90000; la sixiéme 900000; la septiéme 9000000, &c.

6°. Chaque chifre seul ne représentant que des unités, la valeur fixe de ces caractères est donc la seule qu'on puisse considérer dans la première suite.

7°. Dans la seconde, la valeur locale tient lieu d'autant de fois 9 que le premier chifre à gauche exprime de dizaines : ensorte que si l'on ne considéroit que les valeurs fixes des caractères qui expriment un nombre quelconque de la seconde suite, il faudroit, pour avoir

le véritable montant, ajouter à ces valeurs fixes autant de fois 9 que la figure du premier chifre à gauche lui attribue d'unités. Par exemple, les deux chiffres 2 & 5 qui compoſent le nombre 25, n'ont que 7 pour valeur fixe; mais le premier chifre 2 fait voir qu'on a ſupprimé 2 fois 9. Dans le nombre 42 on aura de même 4 fois 9, plus 4, plus 2, &c.

8°. Dans la troiſiéme ſuite, outre qu'on a, comme dans la ſeconde, ſupprimé autant de fois 9 que le ſecond chifre exprime de dizaines, on a encore ſupprimé autant de fois 99 que le premier chifre à gauche vaut de centaines. Ainſi dans le nombre 247 la valeur locale fait valoir au premier chifre 2, le nombre 2 plus deux fois 99, le chifre 4 vaut auſſi 4, plus quatre fois 9.

15 9°. C'eſt-à-dire enfin, que pour placer chaque chifre dans ſa valeur locale, on a ſupprimé un nombre exprimé par autant de 9 que ce chifre a de caractères après lui, & pris autant de fois que ſa figure exprime d'unités.

Par exemple, dans le nombre	1 2 3 4 5 6 7 8 9
Le chifre 1 tient la place de 1, plus une fois	9 9 9 9 9 9 9 9
Le chifre 2 repréſente 2, plus deux fois	9 9 9 9 9 9 9
Le chifre 3 exprime 3, plus trois fois	9 9 9 9 9 9
Le chifre 4 vaut 4, plus quatre fois	9 9 9 9 9
Le chifre 5 déſigne 5, plus cinq fois	9 9 9 9
Le chifre 6 tient lieu de 6, plus ſix fois	9 9 9
Le chifre 7 a la valeur de 7, plus ſept fois	9 9
Enfin, le chifre 8 vaut 8, plus huit fois	9

10°. Donc dans tous les chifres qui précedent le dernier d'un nombre quelconque, la numération ſupprime le nombre 9 autant de fois qu'il eſt poſſible.

16 11°. Par conſéquent lorſque les valeurs de tous les chifres qui ſervent à exprimer un nombre quelconque, ſeront égales à une ou pluſieurs fois 9, le nombre lui-même ſera multiple de 9. Par exemple, les nombres 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99 multiples de 9 dans la ſeconde ſuite ſont exprimés par des caractères dont les valeurs fixes ſont égales à une fois 9, ou à deux fois 9. Il en ſera de même des plus grands nombres qui ſeront multiples de 9.

12°. On remarquera encore avant de terminer cet article, que pour écrire un nombre en chifres, on eſt ſuppoſé commencer par les plus baſſes eſpèces, c'eſt-à-dire, par les unités, ou le chifre le plus à la droite de celui qui le forme : & qu'au contraire quand il s'agit de le lire, on commence toujours par les plus hautes eſpè-

tés ; ou par le chifre le plus à la gauche du Lecteur.

Ces suites que l'ordre de la numération nous a fait découvrir, ne sont pas les seules qu'on puisse considérer sur les nombres. On pourroit examiner la suite infinie des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, &c. qui comprend la moitié de tous les nombres entiers possibles, la suite pareillement infinie des nombres pairs 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, &c. qui comprend l'autre moitié des mêmes nombres, la suite des nombres décimaux 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, &c. & une infinité d'autres suites dont la plûpart sont purement curieuses. Nous traiterons de celles qui sont utiles à mesure que nous aurons occasion d'en parler.

Des Opérations du premier dégré sur les Nombres entiers.

La grandeur ou la quantité étant précisément ce qui est susceptible de plus & de moins (2), il est évident qu'on ne peut faire sur elle que deux espèces d'opérations; sçavoir des opérations par lesquelles on lui ajoute, & des opérations par lesquelles on en retranche quelque chose.

Si l'on avoit pour objet les quantités en général, on pourroit dire que chacune de ces deux sortes d'opérations peut se faire de six manières differentes; mais comme nous ne parlons ici que des nombres & en particulier des nombres entiers, il est certain que de ces six manières d'opérer il y en a trois qui ajoutent aux quantités exprimées par ces nombres, & que les trois autres en retranchent.

Ces six manières d'opérer sont, 1°. L'addition. 2°. La soustraction. 3°. La multiplication. 4°. La division. 5°. L'exaltation ou formation des puissances. 6°. L'extraction des racines. On les nomme en général *opérations*.

Il y en a trois qu'on appelle *opérations directes*, qui sont l'addition, la multiplication, & l'exaltation : les trois autres, c'est-à-dire, la soustraction, la division & l'extraction, se nomment *opérations indirectes*.

Les opérations directes ajoutent aux quantités sur lesquelles on opére, tant qu'il ne s'agit que des nombres entiers; & les opérations indirectes en retranchent toujours dans le même cas des nombres entiers.

Lorsque l'on opère au moins sur deux quantités pour en découvrir une troisiéme, l'opération est du premier degré; mais elle est au moins du second degré & peut appartenir à quelque dégré plus élevé quand on n'a qu'une quantité sur laquelle on puisse opérer pour trouver une autre quantité que l'on cherche.

Les opérations du premier dégré sont l'addition, la soustraction,

la multiplication & la division. Les deux autres, sçavoir l'exaltation & l'extraction, appartiennent aux dégrés superieurs.

AVERTISSEMENT.

Dans la suite, lorsque plusieurs chifres seront placés les uns sous les autres, nous dirons qu'ils sont dans la même *colomne*. Au contraire une suite de chifres disposés les uns à côté des autres, sera appellée un *rang*.

DE L'ADDITION.

17 L'*Addition* est une opération par laquelle on joint & l'on réunit plusieurs quantités données: celle qui en resulte s'appelle *somme*.

18 Pour faire l'addition 1°. On posera les quantités que l'on veut ajouter ensemble les unes sous les autres, ensorte que les unités des unes soient sous les unités des autres, les dizaines sous les dizaines, les centaines sous les centaines, les milles sous les milles, &c. & l'on tirera une ligne au-dessous.

2°. On commencera par ajouter ensemble toutes les unités, & si leur somme ne surpasse pas neuf, c'est-à-dire, si elle est moindre qu'une dizaine, & peut s'exprimer par un seul chifre; on posera le chifre qui représente cette somme au-dessous de la ligne & dans la colomne des unités.

3°. Si cette somme étant plus grande que neuf, vaut précisement une ou plusieurs dizaines comme dix, vingt, trente, &c. on posera zero sous la colomne des unités, & on retiendra le nombre de dizaines qu'on a trouvées pour les compter comme unités avec la colomne suivante, c'est-à-dire, avec les dizaines.

4°. Si cette somme étant plus grande que neuf, vaut une ou plusieurs dizaines avec une ou plusieurs unités; comme onze, quinze, vingt-&-un, vingt-sept, trente-&-un, trente-six, &c. on posera sous les unités le nombre qui exprime les unités, & on retiendra les dizaines pour les compter avec la colomne des dizaines.

5°. On opérera sur la colomne des dizaines comme on a fait sur celle des unités, en y ajoutant comme unités les dizaines qu'on aura retenues de la colomne précedente s'il y en a eu.

Enfin, on fera la même opération sur toutes les colomnes jusqu'à la fin, en remarquant (comme nous l'avons déja vû (14) que les dizaines par rapport à une colomne ne sont que des unités par rapport à la colomne suivante à gauche.

EXEMPLES.

Pour ajouter ensemble les nombres 470, 1053, 272, 6812, on commencera par les disposer comme il suit.

	4	7	0
1	0	5	3
	2	7	2
6	8	1	2
8	6	0	7

Ensuite on dira *zero & 3 font 3, & 2 font 5, & 2 font 7, je pose 7 sous les unités.*

Passant à la seconde colomne on dira, 7 *& 5 font* 12, *&* 7 *font* 19, *&* 1 *font* 20, *je pose* 0 *& retiens* 2.

On ira à la colomne suivante, en disant 2 *retenus &* 4 *font* 6, *&* 2 *font* 8, *&* 8 *font* 16, *je pose* 6 *& retiens* 1.

Enfin, on comptera la dernière colomne en cette sorte, 1 *retenu &* 1 *font* 2, *&* 6 *font* 8, *je pose* 8. On aura donc pour somme le nombre 8607. & l'addition sera faite.

On peut remarquer que cette opération est toute fondée sur la loi de la numération & sur la propriété de la valeur locale des chifres (14 & 15) car on a fait autant d'additions particulières qu'il y a de colomnes dans les quantités ajoutées, & à chacune de ces additions particulières on a supprimé le nombre 9 autant qu'il a été possible, puisque ce qu'on écrit sous chaque colomne & ce qu'on retient pour la suivante, pris ensemble comme unités, n'exprime que ce qui est au-dessus de 9. L'addition n'est donc qu'une manière d'abreger l'expression des quantités ajoutées sans changer leur valeur.

D'ailleurs on sentira aisément l'avantage de retenir les dizaines d'une colomne pour les porter à la colomne suivante, si l'on fait réflexion qu'en ne retenant rien on auroit deux additions à faire au lieu d'une.

Par exemple, si sans rien retenir on veut ajouter les nombres suivans.

On sera obligé de dire, 7 & 9 font 16, & 6 font 22, & 8 font 30, je pose 0 & avance 3.

5 & 8 font 13, & 9 font 22.

4 & 8 font 12, & 5 font 17, & 3 font 20.

Et ensuite d'ajouter ces trois sommes en une seule qui sera

	4	5	7
	8	0	9
	5	8	6
	3	9	8
		3	0
	2	2	
2	0		
2	2	5	0

En opérant de la même façon, on trouvera que les nombres 83642, 56704, 95092, 80001, 4715, 10970980, ajoutés ensemble, donneront pour somme 11291134.

			8	3	6	4	2
			5	6	7	0	4
			9	5	0	9	2
			8	0	0	0	1
				4	7	1	5
1	0	9	7	0	9	8	0
1	1	2	9	1	1	3	4

La preuve de cette opération se fera en ajoutant de nouveau ces nombres après les avoir differemment disposés, ou en les comptant de bas en haut si on les a d'abord comptés de haut en bas.

Il est vrai qu'il y a une autre sorte de preuve qu'on peut mettre en usage; mais comme elle se fait par le moïen d'une soustraction, dont nous ne devons pas encore supposer la connoissance, nous en parlerons après que nous aurons vû cette Regle.

Les Arithméticiens donnent encore une autre preuve de l'Addition, qu'ils appellent *la preuve de neuf*; elle consiste à ajouter ensemble les valeurs fixes de chaque chifre, sans avoir égard à leur valeur locale : rejetter 9 autant de fois qu'il est possible, tant dans les quantités à ajouter, que dans leur somme, & voir si les restes sont égaux; mais cette prétendue preuve est fort équivoque, & je ne la donne que pour en faire voir la fausseté. Par exemple, si aïant ajouté 3581, 2350, 6013, on trouve pour somme 11944, comme le donnera la Regle, on diroit 3 & 5 font 8, & 8 font 16, & 1 font 17, dont ôtant 9 reste 8, & 2 font 10, & 3 font 13, & 5 font 18, dont ôtant deux fois 9 il ne reste rien. 6 & 1 font 7, & 3 font 10, ôtant 9 reste 1. Ensuite ajoutant de même les valeurs fixes des chifres de la somme 11944, on aura 1 & 1 font 2, & 9 font 11, & 4 font 15, & 4 font 19, dont retranchant deux fois 9 ou 18, reste 1 : *donc* dira un Arithméticien, *la Regle est bien faite*. Je conviendrai sans peine avec lui que si cette espèce de preuve ne se peut pas faire, l'opération est fausse; mais je ne conviendrai pas également qu'elle soit nécessairement bonne quand on pourra faire cette preuve : car dans tel ordre que soient disposés les chifres 1, 1, 9, 4, 4 de la somme, on aura toujours le même nombre 19 pour leur valeur fixe, ainsi 19144, 94411, & toutes les autres

combinaisons de ces mêmes chifres donneront une égale preuve de la bonté de l'opération, quoique leurs valeurs soient fort differentes de la somme 11944, qu'on a trouvée par l'addition & qui est la seule vraïe.

Bien plus, en supprimant le chifre 9 dans la somme, la même preuve auroit encore lieu, par conséquent on ne peut s'assurer par ce moïen de la justesse d'une addition.

Il est cependant vrai que cette preuve est fondée sur le principe de la numération (15) & sur l'opération même de l'addition : qualité qui n'a peut-être pas même été soupçonnée par ceux qui la donnent pour preuve : mais elle n'en est pas moins fausse.

Si l'on avoit beaucoup de nombres à ajouter ensemble, on feroit plusieurs additions particulières, & on ajouteroit ensemble toutes les sommes particulières qui en seroient resultées pour avoir la somme totale. C'est ce qui se pratique dans les toisés, comptes, & dans tous les autres calculs composés de beaucoup de nombres.

Si l'on avoit à ajouter ensemble plusieurs quantités exprimées chacune par un ou plusieurs chifres réels, suivis d'un ou de plusieurs zeros en nombre égal, il suffiroit d'ajouter ensemble les chifres réels de même espèce, & de mettre après leur somme autant de zeros qu'il y a de colonnes remplies par des zeros.

Par exemple, si l'on vouloit ajouter ensemble les nombres 10000, 40000, 250000, 80000, comme il y a quatre zeros après chacun de ces nombres, au lieu de se donner la peine de les écrire à l'ordinaire en cette sorte :

```
 10000
 40000
250000
 80000
------
380000
```

On se contenteroit de les poser en supprimant les zeros qui suivent les chifres réels comme ci-après, & l'on diroit simplement *1 & 4 sont 5, & 5 sont 10, & 8 sont 18, je pose 8 & retiens 1 & 2 sont 3 je pose 3* : & ensuite on avanceroit la somme 38, en mettant après elle quatre zeros pour lui faire valoir 380000.

```
     1
     4
    25
     8
 ------
 380000
```

Mais alors il faut bien prendre garde à la quantité de zeros qui se trouve après chaque nombre : car s'il y en a plus ou moins à l'un qu'à l'autre, par exemple si l'on avoit les nombres 45000, 60000, 6250, 84900 à ajouter ensemble, comme en les disposant selon la regle les uns sous les autres, on ne trouvera qu'une seule colomne qui n'ait aucun chifre réel, il sera plus simple d'opérer à l'ordinaire.

```
  45000
  60000
   6250
  84900
 ------
 196150
```

DEMONSTRATION DE L'ADDITION.

LA *somme de plusieurs nombres est égale à tous ces nombres pris ensemble.* Car (axiome 3) le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble. Or la somme de plusieurs nombres n'est autre chose que l'assemblage de toutes les parties de ces nombres, & la somme trouvée par l'addition contient autant d'unités, autant de dizaines, autant de centaines, &c. que tous les nombres ajoutés contiennent ensemble d'unités, de dizaines, de centaines, &c. puisqu'on a pris la somme des unités, la somme des dizaines, la somme des centaines, &c. Donc la somme de plusieurs nombres est égale à tous ces nombres pris ensemble. Ce qu'il falloit démontrer.

DE LA SOUSTRACTION.

19 LA *Soustraction* est une opération dans laquelle on compare deux quantités inégales pour decouvrir de combien l'une des deux surpasse l'autre. Le resultat s'appelle *difference*.

Pour plus de commodité nous appellerons *soustréande* le nombre que l'on soustrait, & celui qu'on en soustrait sera nommé *soustracteur*.

Le

Le but de la Soustraction est de connoître la différence qui se trouve entre les deux quantités qu'on y compare.

Cette différence s'appelle *excès* dans la plus grande, & *défaut* dans la plus petite. Par exemple, si l'on compare les deux nombres 15 & 12, on dira que 3 leur différence est l'excès de 15 sur 12, & le défaut de 12 à 15. D'où l'on voit que c'est la même quantité 3 qui manque à 12 pour être égal à 15, & qui est de trop à 15 pour qu'il soit égal à 12.

On voit encore de là que cette opération ne peut jamais avoir lieu qu'entre deux quantités, & par conséquent si le soustréande ou le soustracteur étoient composés l'un ou l'autre ou tous les deux, de plusieurs quantités particuliéres, il faudroit additionner toutes les quantités dont on veut soustraire, & retrancher de leur somme celle de toutes les quantités que l'on veut en soustraire après les avoir aussi ajoutées ensemble.

20 Pour soustraire une quantité numérique d'une autre quantité numérique plus grande & connoître leur différence.

I°. On posera le soustracteur sous le soustréande, ensorte que les unités de l'un soient sous les unités de l'autre, les dizaines sous les dizaines, les centaines sous les centaines, les milles sous les milles, &c. & on tirera une ligne au-dessous.

II°. On commencera par soustraire les unités du soustracteur des unités du soustréande, & alors il se présentera l'un des trois cas suivans; le chifre supérieur qui exprime les unités dans le soustréande, peut être plus grand que le chifre inférieur qui lui correspond dans le soustracteur, il peut lui être égal, il peut être plus petit. J'entens par chifre plus grand, égal ou plus petit, celui qui vaut plus, autant ou moins qu'un autre.

1°. Si le chifre du soustréande est plus grand que son inferieur correspondant, on retranchera le plus petit du plus grand, & on posera sous la ligne & au-dessous de la même colomne leur différence. Ainsi pour soustraire 34 de 66, on posera ces nombres en cette sorte:

$$\begin{array}{r} 66 \\ 34 \\ \hline 32 \\ \hline \end{array}$$

Et on dira 4 *de* 6 *reste* 2, 3. *de* 6 *reste* 3.

2°. Si ces deux chifres sont égaux, en retranchant l'un de l'autre il restera zero qu'on posera sous la ligne & dans la même colomne. Ainsi pour soustraire 25 de 35.

3	5
2	5
1	0

On dira d'abord 5 *de* 5 *reste* 0, & ensuite 2 *de* 3 *reste* 1.

3°. Enfin, si le chifre du soustréande est plus petit que celui du soustracteur placé dans la même colomne, on lui ajoutera par la pensée une dizaine, & après avoir soustrait de cette somme le chifre inférieur correspondant & posé le reste au-dessous, on retiendra cette dizaine ajoutée pour la compter comme unité avec le chifre suivant dans le soustracteur.

Par exemple, pour soustraire 27 de 43, après avoir disposé ces deux nombres à l'ordinaire, comme il est clair qu'on ne peut retrancher 7 sur 3, on *dira* 7 *de* 13, *reste* 6 *& retiens* 1 *&* 2 *sont* 3 *de* 4 *reste* 1.

4	3
2	7
1	6

Il faut remarquer qu'en opérant de cette façon on augmente également les deux quantités sur lesquelles on opère; & nous avons vû (axiome 10) que si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, les totalités sont encore inégales avec la même différence : or cette différence est le seul objet de la soustraction (19) & par conséquent la dizaine que l'on ajoute de part & d'autre, n'empêche point que la soustraction soit éxacte.

III°. On fera les mêmes opérations sur les chifres suivans, c'est-à-dire qu'on pratiquera sur les dizaines, sur les centaines, sur les milles, &c. les regles que nous venons de prescrire pour les unités, & le nombre qui resultera de toutes ces soustractions particuliéres, sera la différence demandée.

EXEMPLES.

Pour soustraire du nombre 4568, le nombre 3245, on les posera l'un sous l'autre, & commençant par les unités on dira 5 *de* 8 *reste* 3, que l'on posera au-dessous, & continuant aux autres colomnes 4 *de* 6 *reste* 2, 2 *de* 5 *reste* 3, 3 *de* 4 *reste* 1, & l'on aura 1323 pour la différence demandée.

4	5	6	8
3	2	4	5
1	3	2	3

Si l'on demande la différence des nombres 2647 & 647, en les disposant comme ci-après, on dira *7 de 7 reste* 0, *4 de 4 reste* 0, *6 de 6 reste* 0, *rien ou zero de 2 reste 2*, ce qui donne 2000 pour la différence demandée.

2647
647
2000

Pour trouver la différence des deux nombres 4653 & 3987, après les avoir disposés comme on a déja vû, on fera la soustraction en disant *7 de 13 reste 6 & retiens 1; 1 retenu & 8 sont 9, de 15 reste 6 & retiens 1; 1 & 9 sont 10, de 16 reste 6 & retiens 1 & 3 sont 4 de 4 reste rien.* La différence est donc 666.

4653
3987
666

Il en seroit de même si le soustréande étoit exprimé par un seul chifre réel suivi de plusieurs zeros, & le soustracteur par des chifres réels, parce qu'alors les zeros n'aïant aucune valeur par eux-mêmes, on n'auroit qu'à retrancher chaque chifre réel du soustracteur de la dizaine qu'on ajouteroit à chaque zero correspondant du soustréande, & retenir une unité pour l'ajouter au chifre suivant du soustracteur.

Ainsi pour connoître la différence des nombres 5000 & 3973, on les écrira comme nous avons dit, & ensuite on fera l'opération en cette manière.

5000
3973
1027

Disant *3 de 10 reste 7 & retiens 1; 1 & 7 sont 8, de 10 reste 2 & retiens 1; 1 & 9 sont 10, de 10 reste 0 & retiens 1; & 3 sont 4, de 5 reste* 1. On aura donc 1027 pour différence.

Mais il arrive le plus souvent que les trois cas ci-dessus expliqués se trouvent réunis dans une seule opération, c'est-à-dire que dans une même soustraction, on trouvera des chifres du soustréande plus grands que leurs correspondans dans le soustracteur; qu'on en trouvera d'égaux de part & d'autre; & enfin, qu'il y en aura aussi dans le

soustréande de plus petits que ceux qui leur correspondent dans le soustracteur : alors on emploie chacune des Regles particuliéres dont nous venons de faire l'application, selon l'occasion & la nécessité.

Par exemple, si l'on veut connoître la différence qui se trouve entre les deux nombres 457859 & 438957, on fera la soustraction de la manière suivante.

$$\begin{array}{r} 4\,5\,7\,8\,5\,9 \\ 4\,3\,8\,9\,5\,7 \\ \hline 1\,8\,9\,0\,2 \\ \hline \end{array}$$

7 *de* 9 *reste* 2. (1[er]. cas.)
5 *de* 5 *reste* 0. (2[e]. cas.)
9 *de* 18 *reste* 9 *&* *retiens* 1. (3[e]. cas.)
1 *&* 8 *sont* 9, *de* 17 *reste* 8 *&* *retiens* 1. (id.)
1 *&* 3 *sont* 4, *de* 5 *reste* 1. (1[er]. cas.)
4 *de* 4 *reste* 0. (2[e]. cas.)

On ne met point ce zero, parce que le zero ne servant qu'à avancer les chifres réels qui le suivent à gauche, il ne seroit d'aucun usage, puisqu'il ne seroit suivi d'aucun chifre en ce sens.

Si l'on avoit à soustraire l'un de l'autre deux nombres exprimés chacun par un ou plusieurs chifres réels, suivis d'un même nombre de zeros, il suffiroit de soustraire les chifres réels du soustracteur des chifres réels du soustréande qui leur répondent, & d'ajouter à la différence autant de zeros qu'il y en a dans chacun de ces nombres. Ainsi pour soustraire 142000 de 475000, on soustraira seulement 142 de 475, & à la différence 333, on ajoutera 000 ou trois zeros en cette sorte.

$$\begin{array}{r} 4\,7\,5 \\ 1\,4\,2 \\ \hline 3\,3\,3\,0\,0\,0 \\ \hline \end{array}$$

Mais si l'un de ces deux nombres a plus de zeros que l'autre, alors on ne négligera dans la soustraction que le même nombre de zeros dans l'un & dans l'autre, & on fera le reste à l'ordinaire. Ainsi pour soustraire 256700 de 300000, on soustrairoit 2567 de 3000, laissant deux zeros de part & d'autre; & à la différence 433, on ajoutera deux zeros pour rendre à cette différence 433 sa véritable valeur 43300.

C'est ici le lieu de parler de la preuve ordinaire de l'addition qui se fait par une soustraction.

21 Elle consiste à ôter de la somme qu'on a trouvée tous les nombres qui ont été ajoutés pour la composer, & si l'addition est éxacte, il ne reste rien; car (ax. 3) un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble, & (ax. 4) après avoir ôté toutes les parties d'un tout, il ne reste rien.

Pour cet effet on commence par ajouter ensemble tous les nombres qui sont dans la colomne des hautes espèces, c'est-à-dire la première en allant de gauche à droite, on soustrait la somme de cette colomne sur le nombre de la somme totale qui y correspond augmenté du chifre qui le suit à gauche s'il y en a; on écrit le reste au-dessous, & on joint par la pensée ce reste avec le chifre suivant à droite dans la somme; & comme ce reste vaut des dizaines par rapport à ce chifre suivant à droite, on le compte par conséquent comme exprimant autant de dizaines qu'il représente d'unités; & sur ce reste ainsi joint avec le chifre suivant, on retranche la somme des chifres de la seconde colomne en écrivant le reste au-dessous, & l'unissant ensuite comme nous venons de le dire avec le chifre suivant dans la somme; & continuant toujours ainsi jusqu'à la fin, s'il reste ou manque quelque chose, on s'est trompé dans l'addition ou dans la preuve. Par exemple,

8504
7609
3405
19518
1010

Si l'on a les nombres ci-dessus qui aïent donné pour somme celui qui est entre deux lignes; pour éprouver si l'on ne s'est pas trompé, on dira à la colomne des hautes espèces, c'est-à-dire à la première à gauche, 8 *&* 7 *sont* 15 *&* 3 *sont* 18, *de* 19 *reste* 1, *pose* 1, qui joint au 5 de la somme vaudra 15; à la seconde colomne, 5 *&* 6 *sont* 11 *&* 4 *sont* 15, *de* 15 *reste* 0, ensorte qu'on n'a qu'une unité pour la colomne suivante; mais comme cette colomne est remplie de zeros, cette unité reste pour faire 18 avec le dernier chifre 8: enfin à la quatriéme colomne, 4 *&* 9 *sont* 13 *&* 5 *sont* 18, *de* 18 *reste* 0. L'addition est juste, puisqu'il ne reste ni ne manque rien.

On peut encore faire l'addition de manière que l'opération porte sa preuve avec soi.

Pour cela, à mesure qu'on fait la somme d'une colomne, on avance dans la colomne suivante le chifre qui exprime le nombre de dizai-

nes qu'on retient; ensuite quand on veut prouver l'addition comme on vient de l'enseigner (21) on trouve tout placés sous chaque colomne les chifres qu'on y mettroit pour la preuve.

En se servant de cette méthode, on a encore l'avantage de ne pouvoir oublier ce qu'on a retenu de la colomne précedente.

Par exemple, si l'on a

```
 2624
 5673
 4391
 7862
 3968
-----
24518
-----
 331
```

A la première colomne à droite on retient 1 pour la deuxiéme; & on place le chifre 1 sous cette deuxiéme colomne au-dessous de la somme: à la deuxiéme on retient 3, pour la troisiéme; on place 3 sous cette troisiéme colomne; à la troisiéme on retient pareillement 3, qu'on avance sous la quatriéme. Enfin, à la quatriéme on retient 2; mais comme on l'avance tout de suite dans la somme, on n'a pas besoin de le mettre dans le rang au-dessous.

Ensuite en faisant la preuve on trouve que la première colomne à gauche vaut 21; & comme les deux chifres de la somme qui y répondent sont égaux à 24, il reste 3 qui est déja placé sous le 4, & qui avec le 5 de la somme compose 35. De même la somme de la deuxiéme colomne sera 32, qui retranchés de 35 donnent pour reste 3, qui se trouve d'avance où la preuve exigeroit qu'on le mît. Enfin, la somme de la troisiéme colomne est 30 qu'on soustrait de 31, & le chifre 1, qui ainsi que les précédens, se trouve tout placé, avec le dernier chifre 8 de la somme, compose le nombre 18 égal à la somme de la quatriéme & dernière colomne. Par conséquent il ne reste rien de part ni d'autre & l'opération est bonne.

On peut remarquer à ce sujet que l'on reconnoîtra facilement la colomne où l'on aura fait quelque erreur de Calcul; car on sera certain de n'en avoir commis aucune, tant que le chifre placé au-dessous de la colomne sera égal à celui que la preuve y feroit mettre. Mais l'addition est une opération si facile qu'on s'y trompe rarement, & dans le cas où l'on craindroit quelque erreur, on auroit presque aussi-tôt fait de la repéter que de la faire de cette manière.

22 La preuve de la soustraction est fort simple, elle se fait par l'addition.

On ajoute le soustracteur avec la différence, & si leur somme est égale au soustréande, la soustraction est bonne; si au contraire cette somme est plus grande ou plus petite, c'est une preuve qu'on s'est trompé, ce qui est fort clair; car le soustracteur & la différence sont les deux seules parties du soustréande, & par conséquent la somme de ces deux parties doit être égale à leur tout (ax. 3.)

DEMONSTRATION DE LA SOUSTRACTION.

La différence qui resulte de la soustraction d'un nombre sur un autre, est la vraie différence de ces deux nombres.

Car en suivant les principes donnés pour cette opération, on prend la différence des unités, la différence des dizaines, la différence des centaines, &c. de ces deux nombres, puisque dans tous les cas on prend pour différence particulière la véritable différence qui se trouve entre les nombres exprimés par les chifres d'une même colomne: mais la différence totale est la somme ou la réunion de toutes les différences particuliéres, puisqu'elle est composée de la différence des unités, de la différence des dizaines, de la différence des centaines, &c. & puisque (ax. 3) le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble, reciproquement toutes les parties prises ensemble sont égales à leur tout, & par conséquent la réunion de toutes ces différences particuliéres compose un tout égal à la différence entiere.

Donc la différence qui resulte de la soustraction d'un nombre sur un autre nombre, est la vraie différence de ces deux nombres, c. q. f. d.

DE LA MULTIPLICATION.

23 *La Multiplication* est une opération dans laquelle on prend une quantité comme il est marqué par une autre.

La quantité que l'on multiplie s'appelle *multiplicande*, celle par laquelle on multiplie se nomme *multiplicateur*; de sorte qu'on peut dire que la multiplication est une opération dans laquelle on prend le multiplicande comme il est marqué par le multiplicateur.

Le resultat de cette opération s'appelle *produit.*

Relativement à ce nom que l'on donne au resultat de la multiplication, on nomme aussi assez souvent d'un même nom le multiplicande & le multiplicateur *les produisans* ou *les racines du produit.*

AVERTISSEMENT.

24 Nous supposerons dans la suite qu'on sait multiplier l'un par l'autre deux nombres chacun moindre que 10, ce qui suffit dans la multiplication où on ne multiplie jamais à la fois qu'un nombre expri-

mé par un chifre seul par un autre nombre aussi représenté par un seul chifre ; c'est pourquoi nous allons donner une Table qu'on appelle communément *la Table de Pythagore* ou *la Table de Multiplication*, dans laquelle on trouvera les produits de tous les nombres d'un seul chifre jusqu'à 81, produit de 9 multiplié par 9.

L'usage de cette Table est de prendre pour produit de deux nombres celui qui se trouve commun aux deux suites de célules qui commencent par ces nombres.

On appellera chaque bande verticale de la Table *une colonne*, & chaque bande horisontale sera nommée *un rang*.

Ainsi pour le produit de 7 par 8 on cherchera 7 dans la première colomne à gauche, & on prendra dans le rang qui commence par 8 le nombre 56, qui se trouve au-dessous de 8, c'est-à-dire qui est dans la huitiéme colomne ou dans la colomne qui commence par 8. Si l'on veut multiplier 6 par 9, on cherchera dans le rang qui commence par 6, le nombre placé sous 9 ou dans la neuviéme colomne, & l'on trouvera 54 pour le produit de 6 par 9.

TABLE DE MULTIPLICATION.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

On

On peut remarquer dans cette Table de multiplication :

1°. Que chaque rang eſt égal & ſemblable à la colonne qui commence par le même nombre, c'eſt-à-dire que le premier rang ou qui commence par 1, eſt égal & ſemblable à la colomne qui commence auſſi par 1; que le ſecond rang eſt égal à la ſeconde colomne; le troiſiéme rang à la troiſiéme colomne; le quatriéme rang à la quatriéme colomne, &c.

2°. Que par conſéquent chaque nombre ſe trouve au moins dans deux célules, excepté les neuf nombres qui ſont communs aux rangs & colomnes de même numero, & qui ne peuvent être produits que par la multiplication de chacun des neuf premiers nombres par lui-même, & qui ſont appellés les *carrés* de ces neuf premiers nombres.

3°. Qu'ainſi tous les nombres qui ſont répétés peuvent être produits par deux ou pluſieurs multiplications différentes; que 24 (par exemple) peut être produit par la multiplication de 8 par 3, de 6 par 4, de 4 par 6, ou de 3 par 8; que 6 peut être produit par la multiplication de 2 par 3, ou de 3 par 2; que 15 eſt le produit de 3 par 5, ou de 5 par 3; que 18 peut auſſi être produit par la multiplication de 2 par 9, ou de 9 par 2, de 3 par 6, ou de 6 par 3, &c. & par conſéquent lorſqu'on veut multiplier un nombre exprimé par un ſeul chifre, par un autre nombre auſſi moindre que 10, on voit dans cette table qu'on aura toujours le même produit en prenant indifféremment lequel on voudra pour multiplicande & l'autre pour multiplicateur; car 8 multiplié par 9, ou 9 multiplié par 8 donne également 72 au produit; mais on ne multiplie jamais à la fois qu'un chifre du multiplicande par un chifre du multiplicateur, & nous allons voir que le produit total eſt la ſomme de tous les produits particuliers qui réſultent de toutes ces multiplications particuliéres; d'ailleurs quand on continueroit cette table à l'infini, il eſt clair que le même ordre ſubſiſteroit & continueroit auſſi à l'infini.

25 Donc en général, ſoit qu'on multiplie le plus grand nombre par le plus petit, ou le plus petit par le plus grand, on aura toujours le même produit.

4°. Enfin, nous conclurons encore qu'on peut multiplier la moitié, le tiers ou le quart, &c. d'un des deux produiſans, par le double, le triple ou le quatruple, &c. de l'autre produiſant. (Par exemple) On aura également 36 pour le produit de 9 & de 4, ſoit qu'on multiplie 9 par 4; ou 3, par 12; ou 18, par 2; &c. Car en multipliant la moitié d'un produiſant par l'autre produiſant entier, on n'aura que la moitié du produit qu'on auroit eu en multipliant l'un par l'autre les deux produiſans entiers. Donc pour avoir le produit

total il faudra doubler ce premier produit, ou, ce qui revient au même, en prenant la moitié d'un des deux produisans on doublera l'autre, & en général on aura toujours le même produit si l'on multiplie la seconde racine par le nombre qui aura divisé la première.

Quoique ces remarques paroissent assez peu intéressantes, on a tant d'occasions de les appliquer, qu'il est nécessaire d'y faire attention.

26 Pour multiplier un nombre quelconque par un autre nombre, & trouver leur produit, 1°. On placera le multiplicateur sous le multiplicande, ensorte que les unités de l'un soient sous les unités de l'autre, les dizaines de l'un sous les dizaines de l'autre, les centaines sous les centaines, &c. & on tirera une ligne au-dessous.

2°. On multipliera tout le multiplicande par les unités du multiplicateur, & pour cela on commencera par multiplier les unités du multiplicande par les unités du multiplicateur, & si le produit n'excède pas 9, on placera ce produit sous la ligne & dans la colomne des unités. Si ce produit surpasse 9, on doit placer les unités sous les unités, & on retiendra autant d'unités pour ajouter au produit suivant, qu'il y a de dizaines dans ce premier produit.

3°. On multipliera ensuite les dizaines du multiplicande par les unités du multiplicateur, & on posera les unités de ce produit au rang des dizaines, en y ajoutant ce qu'on aura retenu du premier produit, & on retiendra les dizaines pour être ajoutées aux unités du rang suivant.

4°. On fera les mêmes opérations sur les centaines, les milles, &c. du multiplicande, en retenant toujours les dizaines d'un produit pour être ajoutées comme unités avec le rang suivant.

5°. Après avoir multiplié tout le multiplicande par les unités du multiplicateur, on multipliera de même tout le multiplicande par les dizaines du multiplicateur, en observant de placer au rang des dizaines le premier nombre qui résultera du produit des unités du multiplicande par les dizaines du multiplicateur, parce que les unités de ce produit sont réellement des dizaines.

6°. Enfin, on suivra les mêmes regles jusqu'à ce qu'on ait multiplié tout le multiplicande par chaque chifre du multiplicateur, en avançant toujours le produit des unités du multiplicande par un chifre quelconque du multiplicateur, sous le chifre du multiplicateur par lequel on a multiplié pour avoir ce produit.

EXEMPLES.

Pour multiplier 45 par 8, on les écrira l'un sur l'autre, & on

dira *8 fois 5 font* 40, *pose* 0 *& retiens* 4; 8 *fois* 4 *font* 32 *&* 4 *retenus font* 36. *je pose* 6 *& avance* 3.

4 5
8
3 6 0

On multipliera 36 par 12, en disant 2 *fois* 6 *font* 12; *pose* 2 *& retiens* 1, 2 *fois* 3 *font* 6 *&* 1 *font* 7 *je pose* 7. 1 *fois* 6 *est* 6, *que je mets sous les dizaines*, 1 *fois* 3 *est* 3. Ensuite ajoutant ces deux produits particuliers, on aura 432 pour le produit total.

3 6
1 2
7 2
3 6
4 3 2

Si l'on demande le produit de 4652 par 237, après les avoir disposés à l'ordinaire.

1°. On dira 7 *fois* 2 *font* 14, *je pose* 4 *& retiens* 1; 7 *fois* 5 *font* 35 *&* 1 *font* 36, *je pose* 6 *& retiens* 3; 7 *fois* 6 *font* 42 *&* 3 *font* 45, *pose* 5 *& retiens* 4; 7 *fois* 4 *font* 28 *&* 4 *font* 32, *je pose* 2 *& avance* 3.

2°. On multiplira 4652 par le second chifre 3, c'est-à-dire par 30, en disant 3 *fois* 2 *font* 6, *je pose* 6; 3 *fois* 5 *font* 15, *pose* 5 *& retiens* 1; 3 *fois* 6 *font* 18 *&* 1 *retenu font* 19, *pose* 9 *& retiens* 1; 3 *fois* 4 *font* 12 *&* 1 *font* 13, *je pose* 3 *& avance* 1.

3°. On multiplira 4652 par 2 qui vaut 200, en disant 2 *fois* 2 *font* 4, *je pose* 4; 2 *fois* 5 *font* 10, *je pose* 0 *& retiens* 1. 2 *fois* 6 *font* 12 *&* 1 *font* 13, *je pose* 3 *& retiens* 1; 2 *fois* 4 *font* 8 *&* 1 *font* 9, *je pose* 9.

4 6 5 2
2 3 7
3 2 5 6 4
1 3 9 5 6
9 3 0 4
1 1 0 2 5 2 4

Ajoutant ensemble ces trois produits particuliers, on aura 1102524 pour le produit entier de 4652 par 237.

27 On remarquera 1°. Qu'il y a autant de produits particuliers que de chifres réels au multiplicateur.

2°. Que le premier chifre à droite du second produit particulier exprime des dizaines, que le premier chifre du troisiéme produit représente des centaines & ainsi de suite. Par exemple, dans l'opération précédente le premier produit, ou le produit de 4652 par 7, étant 32564, celui du même nombre 4652 par le chifre 3 n'est pas 13956, mais 139560, parce que le 3 du multiplicateur vaut trois dizaines, & de même le produit de ce nombre 4652 par le troisiéme chifre 2 n'est pas 9304, mais 930400, parce que le chifre 2 vaut deux centaines.

En suivant les mêmes principes on pourra trouver le produit de tout autre nombre quel qu'il soit.

Par exemple en multipliant	856439
par	7633
	2569317
	2569317
	5138634
	5995073
On aura au produit	6537198887

En multipliant	4587801
	735920
	91756020
	41290209
	22939005
	13763403
	32114607
On aura pour produit	3376254511920

28 Nous avons déja vû (25) qu'il est indifférent de prendre pour multiplicateur ou multiplicande celui qu'on veut des deux nombres à multiplier l'un par l'autre, & nous venons de voir (27) qu'il y a autant de produits particuliers que de chifres au multiplicateur : d'où nous pourrons conclure :

1°. Que si un multiplicateur est composé d'un plus grand nombre de chifres que son multiplicande, il est plus simple & par conséquent meilleur alors de prendre le multiplicande pour multiplicateur. Par

exemple., si l'on proposoit le nombre 35 à multiplier par 2679; comme il y a quatre chifres au multiplicateur, on auroit quatre produits particuliers (27) & en le prenant pour multiplicande on n'en aura que deux, & le produit total sera le même (25).

```
   35          2679
 2679            35
-----          -----
  315          13395
 245           8037
210            -----
70             93765
-----
93765
```

2°. Si cependant ce multiplicateur composé d'un plus grand nombre de chifres que son multiplicande étoit exprimé par un moindre nombre de chifres réels suivis de plusieurs zeros, comme chaque zero du multiplicateur, multipliant tout le multiplicande, ne donne au produit que zero, & ne sert qu'à placer les chifres du produit suivant dans leur valeur locale, on multiplieroit le multiplicande proposé par les chifres réels du multiplicateur, & on ajouteroit au produit autant de zeros qu'il y en a dans ce multiplicateur après les chifres réels : ainsi pour multiplier 45632 par 8910000, au lieu de l'écrire de cette façon

```
                  45632
                8910000
                -------
ou de celle-ci  8910000
                  45632
                -------
```

On posera d'abord celui qui a plus de chifres réels de suite, & au-dessous celui qui en a moins, en faisant deborder vers la droite tous les zeros en cette sorte :

```
     45632
      8910000
  -------------
     45632
   410688
  365056
  -------------
  406581120000
```

Et après avoir multiplié 45632 par 891 seulement, au produit

40658112 on ajoutera 0000 ou quatre zeros, pour avoir le véritable produit 406581120000.

3°. Ce sera la même chose si le multiplicande & le multiplicateur sont tous deux exprimés par un ou plusieurs chifres réels, suivis d'un ou de plusieurs zeros; car alors on prendra pour multiplicande celui des deux produisans qui aura plus de chifres réels, on multipliera ses chifres réels par les chifres réels de l'autre nombre à multiplier, & on écrira après le produit autant de zeros qu'il y en a après le multiplicande & après le multiplicateur : ainsi pour multiplier 45000 par 5240, on multipliera seulement 524 par 45 en les posant, de sorte que le premier zero de l'un après les chifres réels soit sous le premier de l'autre aussi après les chifres réels, & au produit 23580, on ajoutera 00000 ou cinq zeros, parce qu'on en a supprimé deux dans un nombre & trois dans l'autre, & le nombre 2358000000 qui en résultera sera le produit véritable.

```
     52400
      45000
   ---------
    2620
   2096
  -----------
   2358000000
```

29. Si l'une des deux quantités à multiplier est un nombre décimal, c'est-à-dire un nombre exprimé par l'unité suivie d'un ou de plusieurs zeros comme 10, 100, 1000, 10000, 100000, &c. on prendra pour produit l'autre quantité à laquelle on ajoutera autant de zeros qu'il y en a après l'unité dans le nombre décimal proposé. Ainsi pour multiplier 256 par 10, on écrira 2560, pour multiplier le même nombre par 100, on écrira 25600, pour le multiplier par 1000, on écrira 256000, &c.

Il est aisé de sentir la raison de cette opération; car selon les principes de la numération (14) un chifre quelconque vaut à la seconde place en allant de droite à gauche dix fois autant qu'à la première, il vaut à la troisiéme dix fois autant qu'à la seconde & cent fois autant qu'à la première, & lorsqu'à un nombre comme 256, j'ajoute 0, ou 00, j'avance chacun de ses chifres d'une ou de deux places, & par conséquent je le rends dix fois ou cent fois aussi grand qu'il étoit, c'est-à-dire que je le multiplie par 10 ou par 100, &c. D'ailleurs il est aisé de se convaincre qu'en multipliant à l'ordinaire par un nombre décimal, on n'auroit d'autre produit que celui que cette abréviation enseigne.

30 Enfin on peut conclure de ce que nous venons de voir, qu'en multipliant un nombre par un autre nombre, le produit particulier de deux caracteres quelconques est suivi dans le produit total d'autant de caracteres qu'il y en a après l'un & l'autre dans les produisans.

Par exemple en multipliant 3264 par 578, soit qu'on fasse la multiplication à l'ordinaire, soit qu'on écrive à part tous les produits particuliers.

```
   3264
    578
  -----
  26112
 22848
16320
-------
1886592
```

```
   3260
    578
  -------
     32
    48
   16
  24
    28
   42
  14
 21
   20
  30
 10
15
-------
1886592
```

Le produit particulier de 8 par 4 ne sera suivi dans le produit total d'aucun caractere. Celui de 8 par 6 sera suivi d'un chifre; celui de 8 par 2 sera suivi de 2 chifres; & celui de 8 par 3 sera suivi de trois chifres.

En multipliant le même multiplicande par le second chifre 7 du multiplicateur, le premier produit particulier qui en résultera sera suivi d'un chifre, le deuxiéme de deux, le troisiéme de trois, le quatriéme de quatre, &c. Enfin en multipliant par le chifre 5 du multiplicateur, comme ce chifre 5 est suivi de deux caracteres & que 4 n'en a point après lui, le produit de 4 par 5 sera aussi suivi de deux caracteres, celui de 6 par 5 sera suivi de trois, parce que 6 est suivi d'un chifre; 2 & 5 étant suivis chacun de 2 chifres, leur produit le sera de 4; & comme 3 est suivi de trois chifres & que 5 en a deux après lui, le produit de 3 par 5 sera suivi de cinq chifres.

Donc en multipliant un nombre par lui-même, il y aura dans le produit total deux fois autant de caracteres après le produit particulier d'un chifre quelconque par lui-même, qu'il y en a après ce chifre dans la racine ou produisant unique. Par exemple en multipliant 256 par

lui-même, il y aura dans le produit total deux chifres après le produit de 5 par 5, & quatre chifres après le produit particulier de 2 par 2, comme on le peut voir en écrivant séparement & sans rien retenir, chaque produit d'un chifre par un autre chifre.

256	
256	
36	produit de 6 par 6
30	produit de 5 par 6
12	produit de 2 par 6
30	produit de 6 par 5
25	produit de 5 par 5
10	produit de 2 par 5
12	produit de 6 par 2
10	produit de 5 par 2
4	produit de 2 par 2
65536	

D'ailleurs il est clair qu'avant de multiplier 5 par 5, il faut avoir multiplié 256 par 6, & 6 par 5; on voit aussi qu'en multipliant les unités 6 par les dizaines 5, on aura au produit des dizaines, c'est-à-dire un nombre suivi d'un chifre; & que quand on multipliera 5 par 5, on aura un nombre suivi de deux caracteres; car des dizaines multipliées par des dizaines, donneront nécessairement des centaines au produit.

Le produit d'un nombre multiplié par lui-même s'appelle le *Carré* de ce nombre. Par exemple 36 est le carré de 6, 25 est le carré de 5, 4 celui de 2, & le produit total 65536 est le carré de 256.

Si on multiplie ce carré 65536 par le même nombre 256, le produit 16777216 qui en résultera se nommera le *Cube* de 256, & contiendra les cubes de chacun des chifres 2 ou 200, 5 ou 50, & 6.

On pourra remarquer à ce sujet que 36 carré de 6 n'étant suivi d'aucun chifre, son cube ne sera suivi d'aucun chifre; mais comme 25 carré de 5 est suivi de deux chifres, & que 5 l'est d'un, le produit de 25 par 5, c'est-à-dire le cube de 5 sera suivi de trois chifres. De même 4 carré de 2 est suivi de 4 caracteres, & 2 l'est de deux, le produit de 4 par 2, ou le cube de 2 sera suivi de 6 caracteres dans le produit total ou dans le cube de 256.

31 C'est-à-dire en général que de tel nombre de caracteres que soit suivi un nombre ou chifre quelconque, son carré sera suivi de

deux

deux fois autant de caractères, & son cube de trois fois autant.

On fait la preuve de la multiplication de deux maniéres différentes.

La première & la plus simple est de multiplier de nouveau les mêmes nombres, en prenant le multiplicateur de la première opération pour le multiplicande de la seconde, & le multiplicande pour le multiplicateur. Par exemple si on a multiplié 538 par 367, on multipliera 367 par 538; & l'on aura le même produit dans les deux cas si l'on a opéré éxactement (25).

La seconde sorte de preuve se fait par la division; par conséquent nous ne pouvons la donner qu'après que nous aurons vû cette regle dans l'article suivant.

Les Arithméticiens donnent sur cette opération ainsi que sur toutes les autres plusieurs preuves prétendues, qu'ils appellent *preuves de 9, de 11, de 7, &c.* qui sont aussi défectueuses que celle que nous avons demontrée fausse en parlant de l'addition; par conséquent chacune de ces preuves en particulier ne prouve rien, il faut en réunir au moins deux différentes pour s'assurer de la justesse d'une opération; c'est pourquoi nous n'en parlerons point, & nous remarquerons seulement qu'une preuve infaillible & seule est toujours préférable à cette multiplicité de preuves équivoques, qui n'ont aucun rapport nécessaire avec les opérations auxquelles on les veut faire servir de preuves.

DEMONSTRATION DE LA MULTIPLICATION.

LA quantité qui résulte de la multiplication d'un nombre par un autre, est le vrai produit de ces deux nombres.

Car (26) on prend le produit des unités, le produit des dizaines, le produit des centaines, &c. du multiplicande, c'est-à-dire qu'on multiplie le multiplicande entier par les unités, par les dizaines, par les centaines, &c. du multiplicateur, c'est-à-dire par tout le multiplicateur; par conséquent le produit total qui n'est que la somme ou la réunion de tous ces produits particuliers est le véritable produit. Donc le résultat de la multiplication est le vrai produit des quantités multipliées entre elles.

DE LA DIVISION.

32 LA *Division* est une opération dans laquelle on compare deux quantités inégales pour connoître comment l'une des deux contient l'autre.

La quantité que l'on divise se nomme *Dividende*; celle par laquelle on divise s'appelle *Diviseur*, & celle qui résulte de la division & qui

exprime comment le diviseur est contenu dans le dividende, s'appelle *Quotient*. Ainsi en divisant 15 par 5, 15 est le dividende, 5 le diviseur, & la quantité 3 qui exprime le nombre de fois que 5 est contenu dans 15, sera le quotient.

L'objet de la division est donc de connoître comment le dividende contient le diviseur, ou comment le diviseur est contenu dans le dividende.

Il y a deux sortes de divisions, la division simple & la division composée.

33 La *Division simple* est celle dans laquelle le diviseur n'a qu'un seul chifre. Ainsi quand on divise une quantité quelconque par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, la division s'appelle simple.

La division est encore simple lorsque le diviseur est un de ces neuf premiers nombres suivi d'un ou de plusieurs zeros; car le zero ne divisant point, à proprement parler, le chifre réel dont il est précédé se trouve seul diviseur, & par conséquent l'opération est simple.

34 La *Division* s'appelle *composée*, lorsque le diviseur contient au moins deux ou plusieurs chifres réels.

35 On appelle *Dividende partiel* ou *Dividende particulier*, chaque partie du dividende à laquelle on compare le diviseur pour connoître comment il y est contenu : & comme le diviseur n'y seroit pas contenu une fois, s'il étoit plus grand que ce dividende partiel, il faut donc (tant qu'il s'agira de l'Arithmétique des nombres entiers) que le dividende partiel soit du moins aussi grand que le diviseur auquel on le compare.

36 Par conséquent lorsqu'en prenant dans le dividende total autant de chifres qu'il y en a dans le diviseur, le nombre qui en résulte se trouve plus petit que celui par lequel on veut diviser, il faut prendre un chifre de plus dans le dividende total pour former le dividende partiel.

DE LA DIVISION SIMPLE.

37 LOrsque le diviseur n'a qu'un seul chifre, ou du moins qu'un seul chifre réel, on fait l'opération en cette sorte.

1°. Vis-à-vis le dividende on fait une accolade capable de contenir deux lignes, on écrit le diviseur dans la première, & on tire un trait au-dessous.

2°. On compare le diviseur avec le premier chifre du dividende, ou (si ce premier chifre étoit plus petit que le diviseur) avec les deux premiers chifres du dividende (36) pour voir combien de fois

ce dividende partiel contient le diviſeur, ou combien de fois le diviſeur eſt contenu dans ce dividende partiel, & alors il arrivera l'un de ces deux cas; ou le diviſeur y ſera contenu éxactement un certain nombre de fois ſans reſte, ou il y ſera contenu une ou pluſieurs fois avec un reſte. Dans chacun de ces deux cas on poſera ſous le diviſeur le nombre de fois qu'on l'a trouvé contenu dans le dividende partiel.

S'il y a un reſte au dividende partiel, on le retiendra pour l'ajouter comme dizaines avec le chifre ſuivant à droite, & ce reſte joint au chifre ſuivant ſera le nouveau dividende partiel ſur lequel on opérera comme on a fait ſur le premier.

Si on n'a point trouvé de reſte, on diviſera de même le chifre ſuivant du dividende par le diviſeur.

Mais ſi aïant déja placé au quotient un ou pluſieurs chifres, c'eſt-à-dire ſi aïant déja diviſé un ou pluſieurs dividendes partiels par le diviſeur, & n'aïant point eu de reſte de la dernière de ces diviſions, il ſe trouve que le chifre ſuivant du dividende ſoit plus petit que le diviſeur, & que par conſéquent le diviſeur n'y ſoit pas même contenu une fois, alors on poſe un zero au quotient, & regardant ce chifre plus petit que le diviſeur comme un reſte, on prend le chifre ſuivant du dividende pour faire avec ce reſte un nouveau dividende partiel.

3°. On continue à diviſer de même juſqu'à ce qu'on ait diviſé tout le dividende par tout le diviſeur, & le quotient trouvé exprime la quantité de fois que le diviſeur eſt contenu dans le dividende.

38 On peut conclure de là que ſi le quotient exprime éxactement le nombre de fois que le diviſeur eſt contenu dans le dividende; donc auſſi le diviſeur étant pris le nombre de fois qu'il eſt contenu dans le dividende, rétablira ce nombre qu'on a diviſé; c'eſt-à-dire en général que *le diviſeur multiplié par le quotient, rendra pour produit le dividende.*

EXEMPLES DE LA DIVISION SIMPLE.

Pour diviſer 356 par 2, on diſpoſera ainſi ces nombres.

Dividende 356 { 2 Diviſeur. / 178 Quotient.

Et l'on dira *la moitié de* 3 (en nombres entiers) *eſt* 1 *& reſte* 1; *la moitié de* 15 *eſt* 7 *& reſte* 1; *la moitié de* 16 *eſt* 8, & le quotient ſera 178.

Pour divifer 486 par 3,

$$486 \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ \hline 162 \end{array} \right.$$

On dira *le tiers de* 4 *est* 1 *reste* 1 ; *le tiers de* 18 *est* 6 ; *le tiers de* 6 *est* 2 ; & le nombre 162 est le quotient cherché.

Pour divifer 1458 par 6,

$$1458 \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ \hline 243 \end{array} \right.$$

On dira *le sixiéme de* 14 *est* 2 *reste* 2 ; *le sixiéme de* 25 *est* 4 *reste* 1 ; *le sixiéme de* 18 *est* 3, & l'on aura 243 pour le quotient.

Si l'on veut divifer 3375 par 9,

$$3375 \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ \hline 375 \end{array} \right.$$

On dira *le neuviéme de* 33 *est* 3, *reste* 6; *le neuviéme de* 67 *est* 7, *reste* 4 ; *le neuviéme de* 45 *est* 5, & 375 fera le quotient cherché.

Pour avoir le quotient de 1656 divifé par 8, on dira *le huitiéme de* 16 *est* 2 ; *le huitiéme de* 5 *est* 0 *reste* 5 ; *le huitiéme de* 56 *est* 7, & 207 fera le quotient demandé.

$$1656 \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ \hline 207 \end{array} \right.$$

Si l'on veut divifer un nombre terminé par un ou plufieurs zeros ; par un autre nombre compofé d'un chifre réel fuivi d'un ou de plufieurs zeros, l'opération ne différera pas des précédentes. Par exemple pour divifer 48600 par 300, on remarquera que le dividende & le divifeur finiffent tous deux par 00, on ôtera autant de zeros à l'un qu'à l'autre, on divifera le refte de l'un par le refte de l'autre & le quotient fera le même : ainfi retranchant deux zeros de part & d'autre, on aura comme dans le fecond exemple 486 à divifer par 3, & le quotient fera encore 162.

Car (14) en fupprimant les deux zeros du dividende & du divifeur, chacun de ces deux nombres n'eft plus que la centiéme partie de ce qu'il étoit auparavant : mais le dividende contient toujours le divifeur de la même manière qu'il le contenoit, puifqu'on n'a fait autre chofe que prendre des parties femblables des premiers nom-

bres qu'on avoit, & que les parties semblables de deux différentes grandeurs se contiennent comme les touts dont elles sont parties.

Sur ce principe on peut remarquer que si l'on avoit à diviser par 20, il faudroit retrancher le dernier chifre du dividende & prendre la moitié du reste.

Pour diviser par 30, 40, 50, &c. on retranchera de même le dernier chifre du dividende & on prendra le tiers, le quart, le cinquiéme, &c. du reste.

Pour diviser par 200, 300, 400, &c. ou par 2000, 3000, 4000, &c. on retranchera autant des derniers chifres du dividende qu'il y a de zeros au diviseur après le chifre réel 2, 3, 4, &c. & on prendra la moitié, le tiers, le quart, &c. du reste.

Enfin pour diviser par un nombre décimal, c'est-à-dire par un nombre exprimé par l'unité suivie d'un ou de plusieurs zeros, on retranchera du dividende autant de chifres qu'il y a de zeros après l'unité dans le diviseur, & le reste sera le quotient.

Par exemple en divisant 854000000 par 10, on aura 85400000; en le divisant par 100, on aura 8540000; par 1000, on aura 854000; par 10000, 100000, 1000000, on aura 85400, 8540, 854 : car (14) le dividende proposé décroîtra toujours en progression décimale, à mesure qu'il sera suivi d'un chifre de moins, & par conséquent en retranchant autant de chifres du dividende qu'il y a de zeros après l'unité dans le diviseur, on n'aura plus pour diviseur que l'unité qui donnera pour quotient un nombre égal & semblable au dividende, puisque tout nombre multiplié ou divisé par 1 est ce nombre même.

Il en seroit encore de même si le diviseur n'étoit pas contenu éxactement un certain nombre de fois dans le dividende, ensorte qu'en divisant l'un par l'autre il restât un nombre qui étant plus petit que le diviseur, ne pourroit pas le contenir : ce reste forme ce qu'on appelle une *fraction*, sorte de nombres dont nous parlerons dans la suite. On l'écrit au-dessus du diviseur en tirant une ligne entre deux.

Ainsi le quotient de 546789 divisé par 10 est 54678, $\frac{9}{10}$, si on le divise par 100 on aura 5467 $\frac{89}{100}$, si c'est par 1000, on aura 546 $\frac{789}{1000}$, & ainsi du reste.

DE LA DIVISION COMPOSÉE.

29 SI le diviseur est composé, c'est-à-dire s'il contient au moins deux chifres réels.

1°. On posera le dividende & le diviseur comme pour la division simple,

2°. On prendra dans les plus hautes espèces du dividende autant de chifres qu'il y en a dans le diviseur, pour en former le premier dividende partiel, & si ce même nombre de chifres formoit une quantité plus petite que le diviseur, on en prendroit un de plus.

3°. On comparera le premier chifre du diviseur avec le premier, ou (dans le second cas) avec les deux premiers chifres du dividende partiel, pour découvrir combien le diviseur peut être contenu de fois dans ce dividende, & posant au quotient le nombre qui exprime comment il est contenu, on multipliera tout le diviseur par ce quotient trouvé, on écrira sous le dividende partiel le produit de cette multiplication; on l'en soustraira, & l'on posera le reste au-dessous.

4°. Vis-à-vis de ce reste on abaissera le chifre suivant du dividende, & la réunion de ces deux quantités formera un nouveau dividende partiel qu'il faudra diviser comme le premier.

Si ce nouveau dividende partiel est plus petit que le diviseur, pour conserver à chaque chifre du quotient sa valeur locale, on mettra un zero au quotient, & tout de suite on abaissera un nouveau chifre du dividende.

5°. On continuera de même jusqu'à ce qu'on ait divisé tout le dividende par tout le diviseur.

Par exemple si l'on propose de diviser 105652 par 433.

Après avoir disposé le dividende & le diviseur comme on a fait (38) pour la division simple; comme le diviseur 433 est plus grand que les trois premiers chifres 105 du dividende, & qu'on ne pourra pas dire *en* 1 *combien de fois* 4? on prendra les quatre premiers chifres 1056 du dividende pour former le premier dividende partiel, & on les séparera des suivans par une virgule, comme dans l'exemple

Ensuite on dira *en* 10 *combien de fois* 4? *il y est* 2 *fois*; *je mets* 2 *au quotient*, & je multiplie le diviseur 433 par 2. J'écris le produit 866 sous le dividende partiel 1056, & je soustrais 866 de 1056, il reste 190.

```
1 0 5 6, 5, 2   { 4 3 3
  8 6 6         { 2 4 4
---------
  1 9 0 5
  1 7 3 2
---------
    1 7 3 2
    1 7 3 2
---------
```

Vis-à-vis ce reste 190, j'abaisse le chifre suivant 5 du dividende, & 1905 sera mon second dividende partiel. *En* 19 *combien de fois* 4? *il y est quatre fois, je mets* 4 *au quotient*, je multiplie le diviseur 433 par 4, & je mets le produit 1732 sous le dividende particulier 1905, je fais la soustraction & j'écris au-dessous le reste 173.

Enfin, abaissant le dernier chifre 2 du dividende, j'ai pour mon dernier dividende partiel le nombre 1732, qui est égal au produit du diviseur 433 par 4. Par conséquent ce dividende contient quatre fois le diviseur, je mets 4 pour troisiéme chifre du quotient, & retranchant le produit 1732 du diviseur par 4, sur le dividende partiel 1732, il ne reste rien; c'est-à-dire que le quotient exact est 244.

Nous conclurrons de cette opération que chaque dividende partiel donne un chifre au quotient. Par conséquent une quantité composée de six chifres étant divisée par une autre quantité exprimée par trois chifres en donnera quatre au quotient si les trois premiers du dividende contiennent le diviseur, & trois s'ils sont plus petits que le diviseur.

Ainsi on pourra voir au premier coup d'œil combien on aura de chifres au quotient d'une division; car en déterminant le premier dividende partiel, on saura que le premier chifre qu'il doit donner au quotient sera suivi d'autant de chifres que ce premier dividende partiel en a après lui dans le dividende total.

En opérant comme nous venons de faire nous trouverons que 3327894 divisé par 5274 donne au quotient 631, & que 17722421605 divisé par 876345 donne 20109.

```
33278,9,4  { 5274        1762242,1,6,0,5  { 876345
31644      { 631         1752690          { 20109
-----                    -------
 16349                     95521,6
 15822                     876345
-----                    -------
   5274                     788710,5
   5274                     7887105
-----                    -------
  0000                      0000000
```

Cette manière d'opérer est commode & facile, elle a de plus l'avantage d'offrir à la vûe tous les produits particuliers, ensorte que si l'on se trompe dans le Calcul, on peut reconnoître aisément son erreur, & vérifier si la somme des produits est égale au dividende proposé.

```
Par exemple en ajou-    { 31644 }
tant les trois produits {  15822 } comme ils sont disposés
                        {   5274 } dans l'opération.
                        -------
on aura le dividende     3327894
```

Il en sera de même de toute autre division proposée.

Mais on abrégera beaucoup l'opération; si (au lieu de multiplier

tout le diviſeur par chaque chifre du quotient, pour ſouſtraire enſuite le produit ſur le dividende partiel) on ne multiplie à la fois qu'un chifre du diviſeur par un chifre du quotient, & qu'on retranche ce produit ſur le chifre du dividende auquel il répond.

On obſervera ſeulement à cet égard que quand le chifre du dividende ſera plus petit que le produit qu'on en voudra ſouſtraire, on ajoutera à ce chifre trop petit autant de dizaines qu'il ſera néceſſaire pour faire un nombre au moins égal au produit à retrancher, & on retiendra ces dizaines ajoutées comme autant d'unités à joindre au produit ſuivant, ce qui ne change point la différence (20) puiſqu'on ajoute des grandeurs égales à des grandeurs inégales. (Ax. 9).

Autres exemples de la Division composée.

Pour diviſer 186624 par 216, après les avoir poſés à l'ordinaire.

On dira *en 18 combien de fois 2?* & trouvant qu'il y peut être contenu 8 fois, je poſe 8 au quotient: enſuite prenant les quatre premiers chifres du dividende pour former mon dividende partiel, je fais l'opération en cette ſorte: *8 fois 6 ſont 48, de 56 reſte 8 & retiens 5*: (je poſe le 8 ſous le quatriéme chifre) *8 fois 1 ſont 8 & 5 retenus ſont 13, de 16 reſte 3 & retiens 1; 8 fois 2 ſont 16 & 1 ſont 17, de 18 reſte 1.*

Devant le reſte 138 j'abaiſſe le cinquiéme chifre 2 du dividende, & le nombre 1382 qui en réſulte ſera mon nouveau dividende partiel que je vais diviſer comme le premier, en diſant: *en 13 combien de fois 2?* il y eſt 6 fois, avec un reſte je poſe 6 au quotient, & tout de ſuite je multiplie & ſouſtrais ainſi: *6 fois 6 ſont 36, de 42 reſte 6 & retiens 4; 6 fois 1 ſont 6 & 4 ſont 10, de 18 reſte 8 & retiens 1; 6 fois 2 ſont 12 & 1 ſont 13 de 13 reſte rien.*

Enfin abaiſſant le dernier chifre 4 du dividende, j'aurai 864 pour le dernier dividende partiel, & trouvant que le diviſeur y peut être contenu quatre fois, je poſe 4 au quotient & je dis: *4 fois 6 ſont 24, de 24 reſte 0 & retiens 2; 4 fois 1 ſont 4, & 2 ſont 6, de 6 reſte 0; 4 fois 2 ſont 8, de 8 reſte 0.* Par conſéquent le diviſeur 216 eſt contenu 864 fois exactement dans le dividende propoſé 186624.

```
1 8 6 6, 2, 4  { 216
  1 3 8 2      { ———
      8 6 4    { 864
      0 0 0
```

Par

Par les mêmes principes on pourra faire les opérations suivantes.

```
46128,9,6,      { 21356
  34169         {
  128136        { 216
  0000000

57324,8,0,0,0,   { 43200
 276480          {
  172800         { 8640
  0000000

99798,5,8,8,     { 4673
 6336            {
 16635           { 21356
  26168
   28038
   00000

6806,2,5,        { 4125
 26812           {
  20625          { 165
  00000

2509,0,5,6,      { 792
 1330            {
  5385           { 3168
   6336
   0000

2839203 2,0,5,0,6,   { 40501013
      4131105        {
        8100206      { 70102
        0000000
```

Nous avons dit que l'on pouvoit faire la preuve de la multipli-

cation par une division, comme en général on peut faire la preuve de chaque opération par l'opération contraire.

40 Cette preuve se fait en divisant le produit trouvé par le multiplicande ou par le multiplicateur, pour avoir au quotient le multiplicateur ou le multiplicande. Par exemple si en multipliant 45632 par 891, on a trouvé 40658112 au produit, on divisera ce nombre 40658112 par 45632 & on aura au quotient 891, ou bien on divisera 40658112 par 891, & le quotient sera 45632.

41 La preuve de la division est plus simple, elle se fait en multipliant le diviseur & le quotient l'un par l'autre, & le produit doit être égal au dividende. Par exemple si l'on a divisé 1102524 par 4652, & qu'aïant trouvé au quotient 237, on veuille s'assurer de la justesse de l'opération, on multipliera le diviseur 4652 par le quotient 237, & trouvant au produit le premier nombre ou dividende 1102524, on est sûr que la division est éxacte.

DEMONSTRATION DE LA DIVISION.

LE quotient d'une division exprime éxactement la manière dont le dividende contient le diviseur.

Car en suivant les regles données pour cette opération, on multiplie les unités, les dizaines, les centaines, &c. du diviseur par chaque chifre du quotient, c'est-à-dire que l'on multiplie tout le diviseur par tout le quotient, & comme on en soustrait le produit sur le dividende total, & que chaque comparaison du diviseur avec le dividende fournit au quotient un chifre qui exprime comment, à chacune de ces comparaisons, le diviseur est contenu dans le dividende partiel, par conséquent aussi le quotient entier exprime la manière dont le dividende contient le diviseur. c. q. f. d.

On verra ci-après au Calcul des fractions décimales, comment on approche du quotient éxact d'une division imparfaite, c'est-à-dire d'une division dans laquelle le dividende n'est pas multiple du diviseur.

Le petit nombre d'exemples que nous avons donnés suffit pour expliquer les opérations du premier degré sur les nombres entiers. On y pourra suppléer en se donnant à soi-même autant de nouveaux exemples qu'on le jugera nécessaire pour se former à la pratique de ces opérations. Ce que nous pourrions en ajouter deviendroit une répétition plus propre à grossir le volume qu'à instruire le Lecteur.

CHAPITRE II.

Du Calcul des quantités littérales entiéres.

Opposition de l'Algébre à l'Arithmétique.

NOUS avons vû dans ce qui a précédé comment on peut ajouter, soustraire, multiplier & diviser les quantités numériques entiéres : ces opérations étendues aux fractions suffisent pour les besoins les plus ordinaires ; mais elles ne peuvent être regardées que comme une simple introduction aux Mathématiques dans lesquelles on seroit arrêté à chaque pas, si l'on négligeoit les secours importans que nous offre l'Algébre.

Pour se convaincre de cette vérité, il suffit de remarquer que lorsque dans l'Arithmétique je compare ensemble deux ou plusieurs nombres, non-seulement je sais le rapport qui est entre eux, mais encore je connois éxactement chacun de ces nombres : car je ne pourrois pas exprimer en nombres une quantité que je ne connoîtrois pas, puisque le nombre est le rapport déterminé d'une quantité avec l'unité (7) : mais dans les Mathématiques il arrive rarement que toutes les quantités que l'on compare ou sur lesquelles on opére soient connues, & par conséquent on ne pourroit résoudre qu'un petit nombre de difficultés si l'on s'en tenoit à l'Arithmétique. C'est pour cela qu'on a inventé un Calcul général & relatif, plus étendu qu'on ne peut penser, dans lequel on ne donne aux caracteres aucunes valeurs absolues, ce qui les rend capables de représenter toutes les grandeurs imaginables. Il faut donc bien se garder de prendre l'Algébre pour une Arithmétique par lettres (comme presque tous les Auteurs l'ont définie jusqu'à présent). Les lettres sont des caracteres que l'on a pris plûtôt que d'autres, parce que leur usage nous est familier & révolte moins la vûe que les caracteres bizarres qu'on y emploïoit autrefois.

Ces avantages de l'Algébre qui en établissent la nécessité, ne sont pas les seuls propres à ce Calcul. Il a encore celui de nous montrer dans le résultat de chaque opération la voie que nous avons prise

pour y parvenir. On pourroit dire à cet égard que l'Arithméticien ressemble à un voïageur, qui marchant dans un païs qu'il ne connoît pas, s'avance vers l'objet auquel il tend & qu'il découvre de loin, mais qui ne remarquant pas le chemin qu'il a tenu, ne peut plus le reconnoître quand il s'agit de retourner sur ses pas ; au lieu que l'Algébriste en allant à son but, marque nécessairement par des traces ineffaçables la route qu'il suit, ensorte qu'il ne lui est pas possible de la méconnoître.

En effet, après chaque opération arithmétique on ne voit dans le résultat que le résultat même. Si après avoir multiplié deux nombres l'un par l'autre on a trouvé au produit 144, on ne peut pas reconnoître si ce produit vient de la multiplication de 72 par 2, ou de 48 par 3, ou de 36 par 4, ou de 24 par 6, ou de 18 par 8, ou de 16 par 9, ou de 12 par 12. Dans l'Algébre au contraire, il n'est pas possible de s'y tromper, les expressions de ce Calcul forment un langage occulaire, trop expressif pour permettre l'erreur, trop concis pour causer d'embarras. Lorsqu'on verra une grandeur telle que ab, on pourra toujours assurer que c'est le produit de la multiplication de a par b.

L'opposition de ces deux Calculs sera encore bien plus marquée, en observant que la solution arithmétique d'une question ne peut jamais être que singulière, parce que l'Arithmétique étant un Calcul absolu, ne peut avoir que des applications particuliéres ; au lieu que dans le résultat d'un calcul algébrique, on trouve non-seulement la solution de la difficulté proposée, mais encore celle de toutes les questions possibles de la même espèce, c'est-à-dire dans lesquelles les quantités auront les mêmes rapports entre elles.

Ce Calcul a encore bien d'autres utilités que nous reconnoîtrons mieux à proportion que nous avancerons davantage.

DE LA NATURE DE L'ALGEBRE.

42 L'*Algébre* est un Calcul général & relatif, dans lequel les grandeurs de tout genre sont désignées sous des rapports abstraits & indéterminés par des caracteres dépouillés de toute signification.

L'idée que présente cette définition n'aura rien que de fort sensible à l'esprit le plus ordinaire, si l'on veut faire attention que l'usage qu'on fait des lettres en Algébre est conforme à celui qui s'observe journellement dans la plûpart des estampes. Toute éloignée que paroisse cette comparaison, elle est si simple & si juste en même-tems, que je ne crois pas devoir l'omettre.

Je suppose, par exemple, avoir devant les yeux une vuë de la ville

de Paris : ce dessein tout parfait qu'il fut d'ailleurs, ne me laisseroit qu'une idée fort imparfaite de cette grande Ville, s'il n'y avoit rien qui me désignât en particulier quels sont les édifices que j'y vois représentés ; mais aussi ce même dessein seroit trop confus, si l'on avoit écrit sur chaque bâtiment le nom qui lui convient : c'est pourquoi on met aux lieux les plus apparens des lettres qui servent de notes ou de renvois, & répétant ces mêmes lettres dans une table ou legende au-dessous du dessein, on en donne l'explication à côté.

Personne n'est révolté de voir dans une semblable légende *a*, *Notre-Dame de Paris* ; *b*, *les Tuilleries* ; *c*, *le Louvre*, &c. Pourquoi ne pourroit-on pas se servir du même moïen pour simplifier des calculs qui deviendroient impossibles sans cette abréviation ? Ne nous sera-t-il pas permis d'emploïer aussi des lettres de renvoi dont nous pourrons expliquer les valeurs dans une légende à part si nous le jugeons à propos ? Je ne crois pas qu'on veuille nous refuser la liberté de suivre un usage aussi général, puisque les chifres, les caracteres de l'alphabet, les notes de la musique, &c. ne sont autre chose que des abréviations, renvois ou signes semblables.

Nous pouvons donc regarder les lettres dont on se sert en Algébre & en général tous les caracteres que ce Calcul emploïe, comme des notes ou signes propres à fixer l'attention de notre esprit, & imaginés seulement pour nous représenter d'une maniere abrégée & selon certaines regles convenues, toutes sortes de grandeurs & tous les rapports & changemens dont elles sont susceptibles.

On peut même pousser plus loin la comparaison ; car de même que les lettres qui, dans le dessein que j'ai supposé, désignent telle ou telle chose, indiqueront des choses toutes différentes dans un autre dessein, de même aussi les lettres qui dans un certain cas auront représenté telle ou telle grandeur, exprimeront des quantités toutes différentes dans une autre occasion, sitôt que la convention, ou, si l'on veut, la légende cessera d'être la même.

43 L'objet de ce Calcul est de résoudre facilement & généralement toutes sortes de problêmes. Il les résout facilement, parce qu'il ne fait qu'indiquer les opérations nécessaires pour parvenir à la solution. Il les résout généralement, parce que les caracteres dont on se sert n'aïant par eux-mêmes aucune signification particuliere, peuvent également s'appliquer à toutes sortes de quantités. Enfin l'Algebre calcule avec la même facilité les grandeurs connues & inconnues, positives & négatives, & même les imaginaires ou impossibles.

Nous verrons dans la suite par quels moïens on exécute chacune

de ces choses ; nous allons commencer par examiner comment on exprime les grandeurs algébriques.

DE LA SIMBOLISATION.

44 LA *Simbolisation est l'art d'exprimer les quantités algébriquement.* On se sert en Algébre de trois sortes de caracteres différens ; de lettres, de signes & de chifres.

45 On y emploïe des lettres pour exprimer toutes sortes de grandeurs d'une manière vague & indéterminée, en quoi consiste (ainsi qu'on l'a déja dit) le caractere propre & distinctif de ce Calcul.

La plûpart des Auteurs se servent ordinairement des premières lettres de l'alphabet jusqu'à l'*o* exclusivement, pour exprimer les quantités connues. L'*o* n'est jamais emploïé que comme zero. Ils emploïent les autres lettres à commencer par les dernières, & remontant jusqu'à l'*o* aussi exclusivement, pour représenter les quantités inconnues.

Il est d'usage de se servir de l'*x* pour désigner l'inconnue d'un problême, de prendre *x* & *y* quand il y a deux inconnues & d'y ajouter *z* lorsqu'il y en a trois : mais tout fréquent que soit cet usage, chacun est le maître d'y déroger, & de prendre toute autre lettre qu'il juge à propos selon les occasions & la commodité, rien n'est plus indifférent.

Si la liberté qu'on a de représenter les grandeurs par tels caracteres qu'on veut, nous dispense de suivre la méthode ordinaire : le désir de simplifier de plus en plus le Calcul, de le rendre plus intelligible, nous engage à en choisir une autre qui paroîtra plus facile en ce qu'elle soulagera davantage la mémoire.

Autant qu'il sera possible nous désignerons les grandeurs algébriques par les lettres initiales des mots qu'elles doivent exprimer. Par exemple si nous voulons indiquer quatre quantités qui doivent garder entre elles un ordre constant, nous nommerons la première *p*, la seconde *s*, la troisiéme *t*, la quatriéme *q* : soit que ces quantités soient connues ou inconnues en tout ou en partie.

46 *Les signes algébriques* sont des caracteres inventés en Algébre pour exprimer d'une manière abrégée & indéterminée certains rapports généraux, & pour indiquer certaines opérations générales.

Dans les comparaisons que l'on fait des quantités algébriques, on en trouve d'égales & d'inégales ; & pour découvrir leurs rapports on les ajoute, on les soustrait, on les multiplie, on les divise comme les quantités numériques ; c'est pourquoi l'on est convenu d'expri-

mer ces rapports, & d'indiquer ces opérations par des signes qui n'en sont que des expressions abrégées.

Lorsque deux grandeurs sont égales, on exprime leur rapport d'égalité par le signe $=$ qu'on met entre elles, & qui signifie & se prononce *égale* : ainsi $a=b$, fait voir que *a égale b*, ou est égal à *b*.

Si au contraire deux grandeurs sont inégales, cette inégalité s'exprime par le signe $>$ ou $<$, en observant de placer l'ouverture du côté de la plus grande des deux quantités comparées, & la pointe du côté de la plus petite : ainsi $a>b$ signifie que *a* est *plus grand que b*, & par la même raison $b<a$, marque que *b* est *plus petit que a*.

Pour marquer qu'on a ajouté une quantité à une autre quantité, on écrit ces quantités à la suite l'une de l'autre, en mettant entre elles le signe $+$ qu'on nomme *plus* : ainsi $a+b$ se lit *a plus b*.

Au contraire pour marquer le retranchement d'une quantité sur une autre, on écrit entre elles le signe $-$ qui s'appelle *moins*. Par exemple $a-b$ se lit *a moins b*.

Pour indiquer qu'il faut multiplier deux grandeurs l'une par l'autre, on met entre elles le signe $\times$ qu'on appelle *multiplié par* : ainsi $a\times b$ se lit *a multiplié par b*.

Enfin pour désigner la division d'une quantité par une autre, on écrit le diviseur sous le dividende avec une petite ligne entre deux ; ainsi $\frac{a}{b}$ se lit *a divisé par b*.

Par exemple si l'on a quatre grandeurs algébriques, a, b, c, d, & que pour un moment on les suppose égales anx numériques 24, 18, 6, 4, on pourra exprimer algébriquement les comparaisons dont elles sont susceptibles en cette sorte.

1° $a>b$, $b>c$, $c>d$, ou *a plus grand que b, b plus grand que c, c plus grand que d*, ce qui est évident en vertu de la supposition, car 24 est plus grand que 18, 18 est plus grand que 6, 6 est plus grand que 4.

2°. Par la même raison on aura $d<c$, $c<b$, $b<a$, qu'on lira *d plus petit que c*, *c plus petit que b*, *b plus petit que a*, car 4 est plus petit que 6, 6 est plus petit que 18, 18 est plus petit que 24.

3°. On aura de même $a=b+c$, c'est-à-dire *a égale b plus c*, puisque 24 égale 18 plus 6.

4°. On aura aussi $b=a-c$, qui se lira *b égal a moins c*, car 18 égale 24 moins 6.

5°. $c\times d=a$, ou *c multiplié par d égale a*; car 6 multiplié par 4 égale 24.

6°. $\frac{a}{c}=d$, ou *a divisé par c égale d*; car 24 divisé par 6 égale 4.

Nous remarquerons que les signes $=$, $>$, $<$, indiquent que toutes les quantités qui les précédent sont égales à toutes celles qui les

suivent, qu'elles sont plus grandes ou plus petites, c'est-à-dire que la signification de ces signes s'étend sur toutes les quantités dont ils sont précédés & suivis.

Au contraire les signes $+$ & $-$ ne signifient que l'addition ou la soustraction de la première quantité qui les suit immédiatement.

Le signe $\times$ marque la multiplication de la dernière quantité qui le précéde par la première qui le suit seulement, ensorte que si l'on vouloit indiquer la multiplication de la quantité entière $a-b$, par une autre quantité $c+d$ aussi entière, il faudroit mettre chacune de ces deux quantités entre deux parenthéses, ou les unir par un trait qu'on tireroit au-dessus en cette sorte $(a-b)\times(c+d)$ ou bien $\times\overline{a-b}+\overline{c\ d}$; & si on l'écrivoit ainsi $a-b+c+d$, cela signifieroit la quantité a moins le produit de b par c, plus la quantité d; ce qui est bien différent.

Enfin la ligne qu'on met entre le dividende & le diviseur, par exemple $\frac{a}{b}$, ou $\frac{a+c}{c-d}$ signifie que toutes les quantités qui sont au-dessus de la ligne doivent être divisées par toutes celles qui sont au-dessous.

47 Comme on peut supposer successivement une infinité de valeurs différentes aux lettres a, b, c, d, &c. il est évident que les rapports qui sont entre les grandeurs désignées par ces lettres a, b, c, d, &c. changeront aussi autant de fois que ces lettres changeront elles-mêmes de valeurs : ainsi les rapports entre ces grandeurs algébriques seroient directement opposées à ceux que nous venons de trouver, si leurs valeurs étoient directement opposées à celles que nous leur avons d'abord supposées.

On se sert de chifres en Algébre en trois maniéres différentes.

48 La première & la moins usitée est celle où les chifres se trouvent unis aux lettres par les signes $+$ ou $-$, comme $a+4$, $b-5$, $c+3$, $d-6$, &c. on les appelle *nombres nombrans*. Ils sont de peu d'usage en Algébre & d'ailleurs (46) il est clair que ceux qui sont précédés du signe $+$ augmentent de leur valeur la quantité qui précéde ce signe, & qu'au contraire ceux qui ont le signe $-$ en doivent être retranchés : c'est pourquoi nous n'en parlerons pas davantage.

49 La seconde manière d'en faire usage est de les écrire avant une ou plusieurs lettres, d'un caractere égal au corps de la lettre & sur la même ligne. Ces sortes de chifres qu'on nomme *coëfficiens* sont fort connus en Algébre, & servent à marquer combien de fois on a ajouté à zero la lettre ou les lettres dont ils sont suivis. Par exemple $4a$ est une quantité dans laquelle 4 est le coëfficient de la lettre a & fait valoir à la quantité $4a$ la quantité $o+a+a+a+a$, c'est-à-

dire

dire que $4a$ vaut quatre fois la quantité a. $3ab$ vaut trois fois la quantité ab, ou $3ab = o + ab + ab + ab$.

50 Enfin, on se sert de chifres pour marquer la répétition d'une seule & même lettre par multiplication : ceux-ci qu'on appelle *exposans* se mettent après la lettre sur laquelle ils tombent, d'un caractere plus petit que le corps de la lettre & hors de la ligne un peu au-dessus en cette sorte a^4. Cette quantité a^4 dont 4 est l'exposant $= 1 a \times a \times a \times a \times a$; c'est-à-dire vaut l'unité multipliée quatre fois successivement par la quantité a, ou cette grandeur a multipliée trois fois par elle-même.

Le coëfficient indique qu'on a ajouté à zero la quantité qui en est affectée, autant de fois que ce coëfficient contient d'unités.

L'exposant marque qu'on a multiplié l'unité par la quantité qui lui est soumise, autant de fois successivement que cet exposant lui-même contient d'unités.

Le coëfficient se lit & se prononce toujours avant la quantité qu'il multiplie parce qu'il la précéde ; au contraire comme l'exposant suit la lettre qu'il éxalte, on ne le prononce jamais qu'après elle.

Le coëfficient désigne l'addition de la quantité entiére dont il est suivi, & dont les caracteres ne sont point séparés par les signes + ou — ainsi $3 bcd = o + bcd + bcd + bcd$.

Mais l'exposant ne tombe jamais que sur la lettre seule dont il est précédé ; ainsi $a^2 b = 1 \times a \times a \times b$.

On ne sauroit trop s'appliquer à faire la différence des coëfficiens & des exposans pour ne pas confondre $2a$ avec a^2, $3a$ avec a^3, $4a$ avec a^4, &c.

DE LA DISTINCTION

DES QUANTITÉS POSITIVES ET NÉGATIVES.

51 ON considère principalement en Algébre deux sortes de quantités, sçavoir les positives & les négatives.

Les quantités positives se marquent par le signe + qu'on écrit ou qu'on suppose au-devant d'elles. Les quantités négatives sont désignées par le signe — dont elles sont toujours précédées.

Pour comprendre sans peine quelle est la nature de ces quantités, il faut remarquer que dans l'Algébre on suppose que toute grandeur part du néant, soit en s'élevant au-dessus ; soit en s'abaissant au-dessous ; ensorte qu'on peut avoir deux suites de quantités, qui commençant toutes deux par zero, soient exprimées par les mêmes caracteres ; & qui soient cependant telles que chaque quantité de l'une

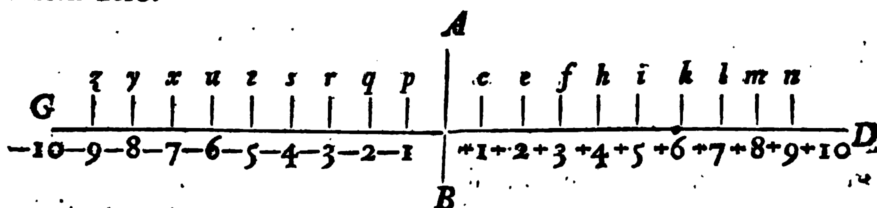
des suites différe de sa correspondante dans l'autre suite, du double de sa valeur prise en sens contraire.

Toute quantité séparement prise est positive en elle-même, & ne peut être négative que par comparaison avec une autre, à laquelle elle est la plus opposée qu'il soit possible : une quantité étant prise pour positive, la négative est celle qui lui est la plus contradictoire, la plus diamétralement opposée & vraiment au-dessous du rien à son égard. Cette quantité n'en est pas moins réelle en elle-même, ce n'est qu'au regard de la première qu'elle est au-dessous du néant. Prise pour positive à son tour, la première sera la négative & deviendra moins que le néant à son égard.

Quelques exemples éclairciront mieux ceci.

1°. Supposons un homme qui ait 10000# d'argent comptant & qui doive 10000#, il est clair que son bien effectif = 0, parce que les 10000# qu'il possede & que nous pouvons considérer comme une quantité positive, sont détruits par les 10000# qu'il doit & qui sont vraiment une quantité négative à l'égard de son argent. Si quelqu'autre étant riche de 10000# ne doit rien, son bien pourra être exprimé par 0 + 10000#, puisqu'il aura réellement 10000# plus que le premier dont nous avons trouvé le bien = 0. Enfin celui qui sans rien avoir se trouveroit débiteur de 10000# auroit véritablement un bien = 0 — 10000#, puisqu'il lui faudroit 10000# pour être dans l'état de celui qui n'a rien & ne doit rien ; & qu'il lui faudroit 20000# pour se trouver aussi riche que celui qui ne devant rien possede 10000#.

2°. Imaginons une ligne droite *AB* traversée par la ligne droite *DG* qui s'en écarte à la droite vers *D*, & à la gauche vers *G*. Le point où ces deux lignes se croisent n'appartient ni à la droite ni à la gauche, il est donc zero par rapport à ces deux termes, ainsi nous l'appellerons zero.



Si nous supposons ensuite que le point *D* nous marque le côté de l'Orient, & le point *G* celui de l'Occident, que la ligne *DG* soit divisée en vingt parties égales, que nous appellerons, si l'on veut, vingt lieues, & qu'au milieu de cette ligne au point *o* ou zero, il y ait un homme en repos ; tant qu'il restera en repos, il est certain que ne s'appro-

chant pas plus du côté de l'Orient que de celui de l'Occident, le chemin qu'il fait vers chacun de ces deux côtés $= o$: mais si cet homme se détermine à s'avancer vers l'Orient ou du côté de D; lorsqu'il sera arrivé en c, son chemin que nous pouvons prendre pour une quantité positive sera exprimé par $o + 1$, c'est-à-dire que depuis le point o d'où il est parti, il aura fait une lieue vers l'Orient, & que par conséquent il ne lui en restera plus que 9 à faire pour arriver au point D où il doit aller; lorsqu'il sera arrivé en c, aïant fait un chemin $= o + 2$, il ne lui en restera que 8 : enfin il n'arrivera en D que lorsqu'il se sera avancé de $o + 10$ vers l'Orient.

Si au contraire par erreur ou autrement, ce même homme au lieu d'aller vers l'Orient en partant du point o, s'avançoit du côté de l'Occident; lorsqu'il seroit arrivé en p, comme le mouvement vers l'Occident sera une quantité négative par rapport au mouvement vers l'Orient que nous avons pris comme grandeur positive, il seroit avancé vers l'Orient d'une quantité négative $= o - 1$: ensorte qu'il lui faudroit retourner sur ses pas, & refaire vers l'Orient autant de chemin qu'il en a fait vers l'Occident pour retourner au point d'où il est parti, c'est-à-dire pour être $= o$; s'il se détournoit davantage, & que passant par les points q, r, s, t, u, il arrivât en x, il est clair que quoiqu'il eût réellement fait sept lieues de chemin depuis le point o d'où nous le supposons parti, comme ces sept lieues n'auroient fait que l'éloigner de l'Orient au lieu de l'en approcher, son avance par rapport à l'Orient seroit $= o - 7$, parce qu'il s'en faudroit de sept lieues que cette avance ne fût $= o$, & que pour s'approcher du point D vers l'Orient de sept lieues, à compter du point o dont nous l'avons supposé en repos, il faudroit qu'en partant du point x pour aller vers D, il fît quatorze lieues, savoir sept pour être au même état qu'il étoit avant de partir, & sept pour arriver en $l = o + 7$.

§ 2 Il paroît évident par ces exemples que prendre une chose positivement, c'est la prendre telle qu'elle est, & dans l'état où on la considére; au lieu que la prendre négativement, c'est non-seulement ne la pas prendre, mais encore prendre son opposée; c'est-à-dire celle qui est autant au-dessous du zero que la première est au-dessus; ou, pour-ainsi-dire, celle qui est autant au-delà du zero, que la première est en deçà : ensorte que ces quantités se détruisent reciproquement.

De-là se tire cette maxime fondamentale du Calcul algébrique, *mettre le négatif, c'est ôter le positif*, & réciproquement.

§ 3 Il faut remarquer que quoiqu'on suppose toujours que toutes les quantités tant positives que négatives soient précédées de zero,

ensorte que $a=o+a$, $-a=o-a$; cependant on n'écrit pas pour cela le o avant le signe + ou —, on se contente de le supposer.

54 Lorsqu'une quantité algébrique n'a point de signe au-devant d'elle (comme on est dans l'usage de le supprimer devant le premier terme positif de toute quantité algébrique) on doit la regarder comme affectée du signe + qui est sous-entendu, & la quantité est positive ; mais on met toujours le signe — devant les quantités négatives, en telle place que se trouvent ces quantités.

DÉFINITIONS ET PRINCIPES.

55 On appelle *terme* toute quantité algébrique exprimée par un seul caractere ou par plusieurs qui ne sont point séparés par les signes + ou —; par exemple a, 1, $2a$, $3a$, a^2, a^3, ab, abc, $abcd$, $7a^3b$, $4a^5c$, sont autant de termes algébriques.

Mais les quantités $a+b$, $a-b+c$, $2a-c+d-g$, $7a^3+2b^4+c^5-4d^2-g-h$, contiennent chacune plusieurs termes; la première est composée de deux termes; la seconde de trois; la troisiéme de quatre; & la quatriéme de six.

56 On appelle terme *d'une dimension* tout terme qui ne renferme qu'un nombre ou une lettre seule, ou multipliée par des nombres, c'est-à-dire par un coëfficient numérique, ainsi a, $2a$, $3b$, $21c$, 35, 69, sont des termes d'une seule dimension, dont chacun représentera une ligne s'il s'agit d'étendue.

57 On dit qu'un terme a *plusieurs dimensions* lorsqu'il est composé de plusieurs lettres. Par exemple ab, $2cd$, $24ac$, sont des termes de deux dimensions & seront regardés comme exprimant des surfaces: b^2c, $3ab^2$, $3a^2b$, sont des termes de trois dimensions ou des solides; parce que (50) $b^2=b\times b$, $a^2=a\times a$, & que par conséquent $b^2c=bbc$, $3ab^2=3abb$, $3a^2b=3aab$, &c.

58 Et comme toute lettre sans exposant ni coëfficient est toujours censée avoir l'unité pour coëfficient & pour exposant, on peut en conclurre ce principe.

1°. *Le nombre des dimensions d'un terme est égal à la somme des exposans des lettres qui y sont contenues*: ainsi a^2b^3c est un terme de six dimensions, $a^5bcd^2f^4$, est un terme de treize dimensions.

2°. *Les coëfficiens qui précédent un terme n'augmentent point le nombre de ses dimensions*: ainsi $35a^2b^3c$ n'a que six dimensions; $69a^5bcd^2f^4$ n'a que treize dimensions comme ci-dessus, où ces mêmes quantités sont emploïées sans coëfficiens.

59 On appelle *termes homogenes* ceux qui ont le même nombre de dimensions ; abc, a^2b, ab^2, dfg, sont des termes homogenes entre eux.

Les termes qui ont un différent nombre de dimensions sont nommés *hétérogenes*. abc, $6ab$, $4a$, $5a^4$, sont hétérogenes.

60 On dit que deux ou plusieurs *termes* sont *semblables*, lorsque ces termes renferment le même nombre de lettres, les mêmes lettres, écrites chacune le même nombre de fois. Tous autres sont *dissemblables* ; & comme les coëfficiens n'augmentent point les dimensions des grandeurs algébriques, la différence de ces coëfficiens n'empêche point la similitude des termes : par conséquent a^2b, $15a^2b$, $6a^2b$ sont des termes semblables, & les termes ab^2, a^2b, $15b^2d$, $15bd^2$ sont homogenes sans être semblables.

61 On dit qu'un terme est *positif* ou *négatif* selon le signe dont il est affecté : ainsi quand il est précédé du signe $+$, on l'appelle positif, & au contraire on le nomme négatif quand il est précédé du signe $-$.

62 On désigne les quantités algébriques par le nombre de leurs termes. Lorsqu'une quantité n'est composée que d'un terme on l'appelle *monome*. On appelle *binome*, *trinome*, *quatrinome*, *quintinome* toute grandeur algébrique composée de deux, trois, quatre ou cinq termes. Et on nomme en general *polinome* une grandeur de plusieurs termes, lorsqu'on ne veut pas en spécifier le nombre, soit à cause de leur quantité ou peu d'utilité qui en résulteroit.

63 Tout *polinome* s'appelle *homogene*, quand tous ses termes sont homogenes ou d'un même nombre de dimensions : & lorsque quelqu'un de ses termes a plus ou moins de dimensions qu'un autre, c'est-à-dire, quand ses termes sont héterogenes, le polinome se nomme *héterogene*.

DE L'ORDONNANCE ALGÉBRIQUE.

64 *L'ordonnance algébrique* est un ordre que l'on observe en écrivant les quantités littérales, pour les rapprocher de leur origine, & rendre leur calcul plus simple & plus facile.

Elle consiste 1°. à suivre l'ordre alphabétique dans chaque terme, ensorte qu'on écrive abc préférablement à bca, ou bac, ou acb, ou cab, ou cba : car comme la valeur des grandeurs algébriques ne dépend pas de leur place, mais seulement de la convention particu-

liere qu'on aura faite avec soi-même au commencement d'un calcul, & des idées qu'on aura attachées à chacune des lettres qui le composent, la valeur sera par conséquent toujours la même en tel ordre que soient écrites les lettres qui composent un terme; mais quand on observera de les écrire toujours suivant une regle constante, on reconnoîtra plus facilement les termes semblables, on abrégera les calculs & on simplifiera l'expression.

2°. Dans les polinomes il arrive presque toujours qu'il y a quelque lettre repetée dans tous, ou dans la plupart des termes, & que cette lettre a des exposans différens dans les différens termes du polinome, alors il est à propos d'écrire d'abord le terme où cette lettre a le plus grand exposant, & de mettre ensuite celui où la même lettre aura un exposant moindre d'une unité, & ainsi de suite, ensorte que les termes où cette lettre ne se trouvera pas, ne soient écrits qu'après ceux dans lesquels elle se trouve. Par ex. le polinome $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ est bien ordonné par rapport à la lettre a; on peut l'ordonner de même par rapport à la lettre b, en l'écrivant ainsi: $b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3$; de toute autre maniere il seroit mal ordonné.

3°. Lorsque l'on a des termes semblables, pour plus de facilité on les écrit les uns sous les autres, au lieu que les termes dissemblables s'écrivent toujours à la suite les uns des autres: par exemple le polinome ci-dessous est ordonné comme il doit l'être par rapport à la lettre x.

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 + 8ax^3 & + 4a^2x^2 & + 8a^3x & + 5a^2bc & + 2abcd \\ - 2ax^3 & - 2a^2x^2 & - 3a^3x & - 3a^2bc & \\ & + a^2x^2 & + 5a^3x & & \\ & & - a^3x & & \end{array}$$

4°. Enfin on observera pour éviter la confusion d'écrire les quantités algébriques en caracteres un peu plus gros que ceux de l'écriture ordinaire, par ce moïen on reconnoîtra toujours au premier coup d'oeil les grandeurs qui sont l'objet des recherches ou du calcul.

DES OPÉRATIONS DU PREMIER DEGRÉ SUR LES GRANDEURS ALGÉBRIQUES ENTIERES.

Chaque opération algébrique se fait de deux manieres différentes.

Dans la premiere on indique seulement que telles ou telles quan-

tités doivent être ajoutées les unes aux autres, ou soustraites les unes des autres, ou multipliées, ou divisées les unes par les autres. C'est à proprement parler la seule opération algébrique, puisque (43) l'Algébre se contente d'indiquer les opérations nécessaires pour parvenir à la solution d'une difficulté.

Mais pour simplifier l'expression de ces grandeurs, on a imaginé d'ajouter, de soustraire, de multiplier & de diviser les quantités algébriques comme les numériques. Cette seconde maniere qui n'est qu'une sorte de réduction, & dont on se sert toutes les fois qu'il est utile & possible de l'emploïer, ne différe pas (comme nous le verrons ci-après) des opérations de l'Arithmétique.

DE L'ADDITION.

65 1°. Pour ajouter ensemble deux ou plusieurs quantités algébriques & trouver leur somme, *on écrira ces quantités les unes à la suite des autres avec leurs propres signes.*

Ainsi pour ajouter les quantités

$$\begin{array}{l} 5ab + 8ac - 2cd \\ 4ad - 4bd + 3bc \\ \hline \end{array}$$

On écrira $5ab + 8ac - 2cd + 4ad - 4bd + 3bc.$

L'addition algébrique n'est donc, comme on le peut voir, qu'une récapitulation, ou si l'on veut un mémoire des quantités que l'on ajoute. Tant qu'il n'y aura pas de termes semblables, on ne pourra faire l'addition que de cette maniere.

2°. Mais si les quantités qu'on veut ajouter contiennent des termes semblables (60), *on n'écrira dans la somme qu'un de ces termes, & ajoutant d'une part les coëfficiens des termes positifs, & de l'autre ceux des termes négatifs semblables, on retranchera la moindre somme de la plus grande, & on prendra le reste pour coëfficient de ce terme en lui donnant pour signe, celui de la plus grande de ces deux sommes.*

Par exemple, si l'on a les quantités

$$\begin{array}{rrrr} 5ab & + \ 8ac & - \ 2bc & + \ 4ad \\ -2ab & - \ 12ac & + \ 7bc & + \ ad \\ -\ ab & - \ 3ac & - \ 5bc & \\ +\ ab & + \ 4ac & & \\ +\ 3ab & & & \\ \hline \end{array}$$

On aura pour leur somme

$$6ab - 3ac \qquad + 5ad$$

Car 1°. $5+1+3=9$, $-2-1=-3$, & $9-3=6$.
2°. $8+4=12$, $-12-3=-15$, & $+12-15=-3$.
3°. $+7=+7$, $-5-2=-7$, & $+7-7=0$.
4°. Enfin, $+4+1=+5$.

On voit delà que le résultat d'une addition algébrique sera une quantité positive, lorsque tous les termes seront eux-mêmes positifs, ou lorsque la somme des positifs sera plus grande que celle des négatifs; ce résultat sera zero lorsque la somme des termes positifs sera égale à celle des termes négatifs; enfin ce même résultat sera necessairement négatif quand toutes les quantités à ajouter seront négatives, ou quand la somme des grandeurs négatives surpassera celle des grandeurs positives.

Car il est évident que $+a+a=+2a$, que $+a-a=0$, & que $-a-a=-2a$ (49).

Donc on ne changera point la valeur d'une quantité quelconque en lui ajoutant & retranchant à la fois une même grandeur.

On pourra d'après ces principes se former pour s'exercer, autant d'exemples qu'on le jugera à propos : ceux ci-dessus suffisent pour expliquer la maniere d'opérer.

DÉMONSTRATION.

Le résultat de l'addition algébrique est la somme des quantités ajoutées. Car lorsque tous les termes sont différens, toutes les quantités composantes entrent dans le résultat : par conséquent ce résultat en est la somme. Lorsqu'il y a des termes semblables, on ne fait autre chose qu'ajouter les quantités de même nature, & effacer celles de nature différente qui se détruisent : par conséquent ce qui reste est véritablement la somme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DE LA SOUSTRACTION.

66 1°. Pour soustraire une grandeur algébrique d'une autre grandeur algébrique & connoître leur différence ; *on écrira le soustracteur après le soustréande en changeant les signes du soustracteur* (19), c'est-à-dire, mettant — pour + & + pour —.

Par exemple, pour soustraire $+ab$, de $+abc$, on écrira $+abc-ab$.
pour soustraire $-ab$, de $+abc$, on écrira $+abc+ab$.
pour soustraire $+ab$, de $-abc$, on écrira $-abc-ab$.
Enfin, pour soustraire $-ab$, de $-abc$, on écrira $-abc+ab$.

Nous

Nous avons vû (52) que *mettre le négatif c'est retrancher le positif*; ainsi pour retrancher le terme positif $+ab$ du terme positif $+abc$, ou du négatif $-abc$, on aura donc $+abc-ab$, ou $-abc-ab$: mais par la même raison (52), *mettre le positif, c'est ôter le négatif*, & par conséquent si de la quantité positive $+abc$, ou de la quantité négative $-abc$, on veut retrancher la quantité négative $-ab$, on ne pourra retrancher cette quantité négative, qu'en lui substituant la positive opposée $+ab$, ce qui donnera $+abc+ab$, ou $-abc+ab$.

On peut rendre encore ceci plus sensible par un exemple numérique. Supposons qu'on veuille retrancher 25 de 60, il est évident que le reste sera 35 : mais si le nombre 60 étoit exprimé par $90-30$, & le nombre 25 par $40-15$, en suivant la regle que nous venons de voir, on écriroit $90-30-40+15$, ce qui se réduiroit à $105-70=60-25=35$. Car lorsque du soustréande $90-30=60$, on retranche $+40$ en écrivant -40, on retranche trop, puisqu'on ne veut ôter que la quantité $25=40-15$: Donc pour remplacer ce qu'on a ôté de trop, on doit ajouter $+15$ pour ne retrancher que $40-15=25$ que l'on s'étoit proposé de soustraire de $60=90-30$.

Par conséquent, si de la quantité $4ab-5ac+3ad-2bc$

On veut soustraire la quantité $-3bd+4cd-3a+b$,

On écrira $4ab-5ac+3ad-2bc+3bd-4cd+3a-b$.

2°. Lorsque le soustréande & le soustracteur contiendront des termes semblables (60), on en fera la réduction comme nous avons vû (65. 2°.), en observant que si le soustréande ou le soustracteur, ou tous les deux n'étoient pas réduits à leur plus simple expression, il faudroit commencer par les y réduire avant de les soustraire l'un de l'autre.

Ainsi, si de la quantité $15abc-9acd+10abd-5bcd$

On vouloit retrancher la quantité $-6abc+9acd+4abd-4bcd$

On auroit pour la différence $+21abc-18acd+6abd-bcd$.

On peut appliquer ici la remarque qui a été faite pour l'addition.

DÉMONSTRATION.

Le résultat de la soustraction algébrique est la véritable différence des deux quantités comparées.

Car indépendamment de ce que nous avons vû (51. 52. 66.), si de la quantité $+a$ on veut retrancher la quantité $+b$ ou $-b$ qui n'est pas semblable à la quantité a, & qui par conséquent n'y paroit pas contenue, on pourra écrire le soustréande $+a$ sous cette forme $a+b-b=a$: & pour retrancher le soustracteur $+b$, on effacera $+b$, & il restera $a-b$; au contraire pour retrancher le soustracteur $-b$, effaçant $-b$, on aura pour reste ou différence $a+b$.

Donc ce qui résulte de la soustraction est la différence cherchée; *Ce qu'il falloit démontrer.*

DE LA MULTIPLICATION.

67 Pour multiplier une quantité algébrique par une autre quantité algébrique, *on peut en indiquer la multiplication, en plaçant le signe* ($\times$) *de cette opération entre le multiplicande & le multiplicateur*: en remarquant (46) que l'on doit tirer un trait au-dessus d'un produisant de plusieurs termes, ou renfermer ce produisant dans une parenthèse, ainsi pour indiquer la multiplication de $3ab+2cd$ par $ac+bd$, on écrira $\overline{3ab+2cd}\times\overline{ac+bd}$, ou $(3ab+2cd)\times(ac+bd)$ (46).

Pour désigner le produit de $4mn-3pq$, par $xy-yz$, on écrira $\overline{4mn-3pq}\times\overline{xy-yz}$, ou $(4mn-3pq)\times(xy-yz)$.

Mais si l'on veut faire l'opération entiere, il faut observer quelques regles particulieres pour les lettres, les coëfficiens, les exposans & les signes des produits relativement aux lettres, aux coëfficiens, aux exposans & aux signes des produisans.

Comme en multipliant un polinome par un autre polinome, on ne peut jamais multiplier à la fois qu'un monome par un monome, nous allons expliquer ces principes sur les monomes seulement, sauf à les appliquer ensuite sur toutes sortes de polinomes.

68 On est convenu que pour exprimer le produit d'un monome algébrique par un autre monome algébrique, *on en écriroit les lettres les unes à côté des autres en forme de sillabes.* Ainsi $a\times b=ab$, $a\times bc=abc$, $ac\times bd=abcd$.

69 Si les deux monomes produisans sont précédés de coëfficiens, comme on doit multiplier tout le multiplicande par tout le multiplicateur (26), *on multipliera le coëfficient de l'un par le coëfficient de l'autre*, & le produit de ces coëfficiens sera le coëfficient du produit des lettres. Par exemple, $3a\times 2b=6ab$, $4a\times 3bc=12abc$, $5ac\times 4bd=20abcd$.

70 Si la même lettre se trouve répetée dans le multiplicande & dans le multiplicateur, on pourra les écrire l'une à côté de l'autre, comme on vient de le dire (68); par exemple, $ab \times ac = aabc$; $ab \times ab = aabb$; $abc \times abc = aabbcc$; $aabc \times abbcc = aaabbbccc$: mais comme cette répétition deviendroit ennüieuse & embarrassante, à proportion du nombre de fois que la même lettre seroit répetée, *on n'écrit cette lettre qu'une seule fois dans le produit, & on met au-dessus d'elle un peu à droite, un petit chiffre qui marque le nombre de fois que cette lettre devroit être écrite dans le produit.* C'est ce qu'on appelle un exposant (50). On pourra donc réduire les expressions ci-dessus, $aabc$, $aabb$, $aabbcc$, $aaabbbccc$ à celles-ci, a^2bc, a^2b^2, $a^2b^2c^2$, $a^3b^3c^3$.

71 Enfin comme le signe du produit dépend nécessairement des signes des produisans, on observera que *le produit sera toujours positif,* ou précedé du signe + *quand le multiplicande & le multiplicateur auront le même signe, & qu'au contraire ce produit sera toujours négatif,* & devra par conséquent être affecté du signe — *quand le multiplicande & le multiplicateur auront différens signes.* On exprime ordinairement cette regle en disant : *les mêmes signes donnent plus, & les signes différens donnent moins.*

On aura donc
$$\begin{cases} + \times + = + \\ + \times - = - \\ - \times + = - \\ - \times - = + \end{cases}$$

Et en général
$$\begin{cases} + \times + \text{ ou } - \times - = + \\ + \times - \text{ ou } - \times + = - \end{cases}$$

Ainsi
$$\begin{cases} +a \times +b = +ab \\ +a \times -b = -ab \\ -a \times +b = -ab \\ -a \times -b = +ab \end{cases}$$

72 Pour multiplier l'une par l'autre deux grandeurs algébriques quelconques, on observera donc à chaque multiplication d'un terme par un autre terme en particulier,

1°. De donner au terme du produit le signe + ou le signe — selon que les deux termes qu'on multiplie auront mêmes signes ou différens signes (71).

2°. De multiplier le coëfficient du terme du multiplicande par le coëfficient du terme du multiplicateur par lequel on multiplie. (69).

3°. D'écrire les unes à côté des autres, & selon l'ordre alphabétique (64) les lettres différentes de ces deux termes. (68).

4°. Enfin, d'ajouter les exposans des lettres qui se trouveront semblables dans ces deux mêmes termes. (70).

Par exemple, pour multiplier $+4ab-3cd$

Par $+2ac-bd$

$$+8a^2bc-6ac^2d-4ab^2d+3bcd^2.$$

Après avoir disposé ces quantités comme on les voit ci-dessus,

On dira *+ par + donne +*, 4 *fois* 2 *font* 8, ab *par* ac *donne* a^2bc.
− par + donne −, 3 *fois* 2 *font* 6, cd *par* ac *donne* ac^2d.
+ par − donne −, 4 *fois* 1 *font* 4, ab *par* bd *donne* ab^2d.
− par − donne +, 3 *fois* 1 *font* 3, cd *par* bd *donne* bcd^2.

Il est fort indifférent de prendre pour multiplicande, ou pour multiplicateur celle qu'on voudra des deux quantités à multiplier : & lorsque l'un des deux produisans a plus de termes que l'autre, si l'on prend pour multiplicande celui qui a le plus de termes, ce n'est que pour la commodité de l'écriture. On aura toujours au produit total le même nombre de termes & les mêmes termes.

Il importe encore fort peu de commencer à multiplier le premier ou le dernier terme du multiplicande par le premier ou le dernier terme du multiplicateur. Ce n'est aussi que pour la commodité de l'écriture qu'on commence ordinairement à multiplier le premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur.

Enfin, quand il se trouve des termes semblables (60) en multipliant, on écrit ces termes semblables les uns sous les autres, & on en fait ensuite la réduction (65. 2°.).

Exemples de la Multiplication algébrique.

Multiplier $4x^3 + 5x^2 + 3x + 7$
Par $6x^2 + 4x + 3$

$$\begin{array}{l} 24x^5 + 30x^4 + 18x^3 + 42x^2 \\ \quad + 16x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 28x \\ \qquad + 12x^3 + 15x^2 + 9x + 21 \end{array}$$

On aura $24x^5 + 46x^4 + 50x^3 + 69x^2 + 37x + 21.$

Multiplier $7z^3 + 6z^2 - 8z + 9$
Par $4z^2 + 3z - 2$

$$\begin{array}{l} 28z^5 + 24z^4 - 32z^3 + 36z^2 \\ \quad + 21z^4 + 18z^3 - 24z^2 + 27z \\ \qquad - 14z^3 - 12z^2 + 16z - 18 \end{array}$$

On aura $28z^5 + 45z^4 - 28z^3 \; * \; + 43z - 18.$

Autres Exemples.

Si l'on multiplie $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$
Par $a - b$

$$\begin{array}{l} a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3 \\ \quad - a^3b - a^2b^2 + ab^3 + b^4 \end{array}$$

$$a^4 \; * \; - 2a^2b^2 \; * \; + b^4.$$

$$\begin{array}{l} 8y^6 - 6y^5 + 7y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 3y + 12 \\ \qquad - 9y^2 + 7y - 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -72y^8 + 54y^7 - 63y^6 + 36y^5 - 45y^4 + 27y^3 - 108y^2 \\ \quad + 56y^7 - 42y^6 + 49y^5 - 28y^4 + 35y^3 - 21y^2 + 84y \\ \qquad - 48y^6 + 36y^5 - 42y^4 + 24y^3 - 30y^2 + 18y - 72 \end{array}$$

$$-72y^8 + 110y^7 - 153y^6 + 121y^5 - 115y^4 + 86y^3 - 159y^2 + 102y - 72.$$

Comme en multipliant les quantités algébriques on place les termes semblables les uns sous les autres, lorsque le multiplicande & le multiplicateur seront bien ordonnés par rapport à une même lettre, il sera bien plus court d'écrire seulement les coëfficiens des termes qui se trouveront semblables à d'autres termes déja produits.

Ainsi l'exemple précédent pourroit être écrit de la maniere suivante.

EXEMPLE.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & 8y^6 & -6y^5 & +7y^4 & -4y^3 & +5y^2 & -3y & +12 \\
 & & & & & & -9y^2 & +7y & -6 \\
\hline
-72y^8 & +54y^7 & -63y^6 & +36y^5 & -45y^4 & +27y^3 & -108y^2 & & \\
 & +56 & -42 & +49 & -28 & +35 & -21 & +84y & \\
 & & -48 & +36 & -42 & +24 & -30 & +18 & -72 \\
\hline
-72y^8 & +110y^7 & -153y^6 & +121y^5 & -115y^4 & +86y^3 & -159y^2 & +102y & -72.
\end{array}
$$

On abrégera donc l'opération en suivant cette méthode : par conséquent on doit l'emploïer aussi souvent qu'il sera possible, comme dans les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & & 8a^5 & -7a^4x & +6a^3x^2 & -5a^2x^3 & +4ax^4 & -3x^5 \\
 & & & & -4a^3 & +4a^2x & -2ax^2 & +x^3 & \\
\hline
-32a^8 & +28a^7x & -24a^6x^2 & +20a^5x^3 & -16a^4x^4 & +12a^3x^5 & & & \\
 & +24 & -21 & +18 & -15 & +12 & -9a^2x^6 & & \\
 & & -16 & +14 & -12 & +10 & -8 & +6ax^7 & \\
 & & & +8 & -7 & +6 & -5 & +4 & -3x^8 \\
\hline
-32a^8 & +52a^7x & -61a^6x^2 & +60a^5x^3 & -50a^4x^4 & +40a^3x^5 & -22a^2x^6 & +10ax^7 & -3x^8
\end{array}
$$

EXEMPLE II.

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$x^7 + 4x^6y + 6x^5y^2 + 4x^4y^3 + x^3y^4$$
$$-3 \quad -12 \quad -18 \quad -12 \quad -3x^2y^5$$
$$+3 \quad +12 \quad +18 \quad +12 \quad +3xy^6$$
$$-1 \quad -4 \quad -6 \quad -4 \quad -y^7$$

$$x^7 - x^6y - 3x^5y^2 - 3x^4y^3 + 3x^3y^4 + 3x^2y^5 - xy^6 - y^7$$

EXEMPLE III.

$$p^6 - 6p^5s + 15p^4s^2 - 20p^3s^3 + 15p^2s^4 - 6ps^5 + s^6$$
$$p^2 - 2ps + s^2$$

$$p^8 - 6p^7s + 15p^6s^2 - 20p^5s^3 + 15p^4s^4 - 6p^3s^5 + p^2s^6$$
$$-2 \quad +12 \quad -30 \quad +40 \quad -30 \quad +12 \quad -2ps^7$$
$$+1 \quad -6 \quad +15 \quad -20 \quad +15 \quad -6 \quad +s^8$$

$$p^8 - 8p^7s + 28p^6s^2 - 56p^5s^3 + 70p^4s^4 - 56p^3s^5 + 28p^2s^6 - 8ps^7 + s^8$$

Mais il n'arrive pas toujours que le produit contienne des termes semblables. Lorsque le multiplicande & le multiplicateur n'ont aucune lettre commune, le produit ne peut avoir de termes semblables. On n'en aura pas non plus si l'un des deux produisans ne contient pas une même lettre répétée dans plusieurs termes, ou si l'un des deux produisans étant ordonné par rapport à une lettre qui y regne seule, l'autre produisant ne contient cette même lettre que dans un de ses termes comme dans l'exemple suivant.

Multiplier $4p^5 - 5p^4 + 6p - 7p^2 + 2p - 23$

par $4p - q - x$

$$\text{on aura}\left\{\begin{array}{l} 16p^6 - 20p^5 + 24p^4 - 28p^3 + 8p^2 - 92p \\ \quad - 4p^5q + 5p^4q - 6p^3q + 7p^2q - 2pq + 23q \\ \quad - 4p^5x + 4p^4x - 6p^3x + 7p^2x - 2px + 23x \end{array}\right.$$

Ce produit ne peut pas se réduire, parce qu'il ne contient point de termes semblables. Dans ce cas, lorsque, comme dans cet exemple, le multiplicande & le multiplicateur sont ordonnés par rapport à une même lettre, on écrit les uns sous les autres les termes dans lesquels cette lettre a le même exposant.

Si le multiplicande & le multiplicateur ne peuvent être ordonnés par une même lettre, on se contentera d'ordonner les termes du produit par rapport à la lettre qui y dominera le plus.

En multipliant $ax^7 - bx^5 + cx^3 - dx + p$

par $my^4 - ny^2 + q$

$$\text{on aura}\left\{\begin{array}{l} amx^7y^4 - bmx^5y^4 + cmx^3y^4 - dmxy^4 + mpy^4 \\ - anx^7y^2 + bnx^5y^2 - cnx^3y^2 + dnxy^2 - npy^2 \\ + aqx^7 - bqx^5 + cqx^3 - dqx + pq \end{array}\right.$$

Pour se rendre cette opération plus familière, on fera bien de s'en donner à soi-même beaucoup d'exemples de toutes sortes. On pourra même pour se convaincre de plus en plus de la justesse des principes que l'on vient de voir (68, 69, 70, 71) en faire l'application à des quantités numériques, en multipliant les uns par les autres des nombres affectés de signes différens, comme on a dû multiplier les grandeurs algébriques.

Par exemple on sait que $8 \times 6 = 48$; que $12 - 4 = 8$ & que $9 - 3 = 6$. Donc au lieu de 8 & 6 nous pourrons prendre $12 - 4$ & $9 - 3$ qui ont les mêmes valeurs, & en suivant les regles ci-dessus, nous trouverons occasion d'y appliquer les quatre cas de la regle des signes (71).

En

En multipliant	8	ou	$+12-4$
par	6	ou	$+9-3$
on doit avoir	48		$+108-36$
			$-36+12$
Et on aura également			$+120-72=48$

On voit déja que le produit eſt le même que ſi l'on avoit multiplié ſimplement 8 par 6, & on ſentira facilement qu'il doit l'être, ſi l'on veut ſe donner la peine de remarquer que

1°. En multipliant 12 par 9 on a un produit beaucoup trop grand, puiſque ce n'eſt que $12-4$ qui doit être multiplié par $9-3$, le produit eſt donc trop grand par le multiplicande & par le multiplicateur.

2°. On fait donc bien de retrancher ſur ce produit celui du premier terme 12 du multiplicande, par la quantité 3 qu'il faut diminuer ſur le premier terme 9 du multiplicateur : ainſi on doit l'ajouter avec un ſigne contraire.

3°. Il eſt également à propos de diminuer encore ce produit trop grand ; car juſqu'à préſent on n'a fait autre choſe que multiplier 12 par $9-3=6$, or ce n'eſt pas 12, mais ſeulement $12-4$ qu'il falloit multiplier : on retranchera donc encore de ce produit celui du ſecond terme 4 du multiplicande par le premier terme 9 du multiplicateur, ou bien on l'ajoutera négativement.

4°. Enfin puiſqu'on doit multiplier tout le multiplicande par tout le multiplicateur, on multipliera le dernier terme -4 du multiplicande par le dernier terme -3 du multiplicateur, & comme on a trop ſouſtrait en retranchant le produit du premier terme 12 du multiplicande par le ſecond terme 3 du multiplicateur, puiſque ce n'étoit pas 12×3 qu'on devoit retrancher, mais ſeulement $(12-4) \times 3$; on ajoutera donc aux produits précédens celui de 4×3 qu'on a ôté de trop ; ainſi l'on aura $-4 \times -3 = +12$.

S'il reſte encore quelques difficultés ſur cette opération, il y a lieu de croire que la démonſtration qu'on en va donner levera tout doute à cet égard.

DEMONSTRATION.

L'indication de la multiplication n'éxige pas de démonſtration.

Relativement aux quatre regles données pour l'opération, nous diviſerons cette démonſtration en quatre articles.

I°. La regle de poſer les lettres les unes à côté des autres en forme

de ſillabes, eſt de pure convention : ainſi l'uſage eſt la meilleure raiſon qu'on en puiſſe donner. *c. q. f.* 1°. *d.*

II°. On doit multiplier les coëfficiens l'un par l'autre, car (26) on doit multiplier le multiplicande entier ou toutes ſes parties par toutes les parties du multiplicateur ou par le multiplicateur entier : donc on doit multiplier le coëfficient du multiplicande par le coëfficient du multiplicateur. *c. q. f.* 2°. *d.*

III°. On doit ajouter les expoſans ; car (50) l'expoſant indique combien de fois la lettre qui en eſt affectée devroit être écrite dans le terme où elle eſt ; or ſi cette lettre ſe trouve écrite m fois dans un des produiſans & n fois dans l'autre, il eſt clair qu'on doit l'écrire dans le produit un nombre de fois exprimé par $m + n$; mais les expoſans ſont m dans un produiſant & n dans l'autre ; donc le produit doit avoir $m + n$ pour expoſant de la même lettre. *c. q. f.* 3°. *d.*

IV°. Enfin on démontrera la regle des ſignes en faiſant attention à la nature des quantités poſitives & négatives, & à la définition de la multiplication.

Ainſi 1°. Si les produiſans ſont tous deux poſitifs, puiſqu'on doit prendre le multiplicande comme il eſt marqué par le multiplicateur (23), on prendra donc poſitivement une quantité poſitive & par conſéquent le produit ſera poſitif. Donc $+ \times + = +$.

2°. Si le multiplicande étant négatif, le multiplicateur eſt poſitif, il faudra prendre une quantité négative telle qu'elle eſt (23 & 52) ; on aura donc un produit négatif. Donc $- \times + = -$.

3°. Quand le multiplicande ſera poſitif & le multiplicateur négatif, comme ce multiplicateur négatif indique qu'il faut 1°. Ne pas prendre le multiplicande tel qu'il eſt. 2°. Qu'au contraire il faut prendre ſon oppoſé (25) : on prendra donc pour produit le contraire d'une quantité poſitive ; ainſi le produit ſera négatif. Donc $+ \times - = -$.

4°. Enfin lorſque les deux produiſans ont le même ſigne $-$, il faut prendre négativement une quantité négative (23) & par conſéquent loin de la prendre telle qu'elle eſt, on doit prendre ſon oppoſée, c'eſt-à-dire celle qui ſeule peut la détruire ou en être détruite (52). Le produit ſera donc poſitif & aura le ſigne $+$. Donc $- \times - = +$.

Donc en général quand les deux produiſans auront le même ſigne, le produit ſera poſitif ; & ce même produit ſera toujours négatif quand les produiſans ſeront affectés de différens ſignes. *c. q. f.* 4°. *d.*

DE LA DIVISION.

73. On pourra toujours indiquer la diviſion d'une quantité algébrique par une autre quantité algébrique, *en écrivant le diviſeur ſous*

le dividende avec une ligne entre deux; ainsi pour diviser a par b, on écrira $\frac{a}{b}$; pour diviser ab par cd, on écrira $\frac{ab}{cd}$; pour diviser $ab + b$ par $mn + nq$, on écrira $\frac{ab+b}{mn+nq}$.

Tant que le dividende & le diviseur ne contiendront ni termes semblables ni lettres semblables dans des termes différens, on ne pourra les diviser que de cette manière, c'est-à-dire qu'on ne pourra qu'en indiquer la division.

74 Mais lorsque les deux monomes qu'on veut diviser l'un par l'autre (car il suffit d'expliquer l'opération sur les monomes, puisqu'on ne peut jamais diviser à la fois qu'un terme par un terme) contiendront des termes semblables, *on effacera dans le dividende les lettres qui lui sont communes avec le diviseur, & les lettres qui resteront exprimeront le quotient.* Par exemple si l'on veut diviser abc par bc, on aura pour quotient a : car la division doit décomposer ce que la multiplication a composé, & (68) on est convenu pour multiplier d'écrire les lettres à côté les unes des autres, donc pour diviser on doit les effacer, & en effaçant bc dans le dividende & dans le diviseur, il restera $\frac{a}{1} = a$; ainsi $\frac{abc}{bc} = a$.

De même $\frac{abcd}{ad} = bc$, $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$, $\frac{abc}{bcd} = \frac{a}{d}$.

75 Si le dividende & le diviseur sont affectés de coëfficiens, *on divisera le coëfficient du dividende par le coëfficient du diviseur, & le quotient de cette division sera le coëfficient du quotient des lettres.* Par conséquent $\frac{15abc}{3bc} = 5a$; $\frac{4abcd}{2ad} = 2bc$; $\frac{6ab}{2bc} = \frac{3a}{c}$; $\frac{3ab}{bcd} = \frac{3a}{1d} = \frac{3a}{d}$.

76 Nous avons vû (70) qu'en multipliant l'une par l'autre deux quantités qui contiennent une même lettre, on ajoutoit leurs exposans : donc pour les diviser *il faudra* en pareil cas *soustraire l'exposant de la lettre du diviseur sur l'exposant de la lettre semblable du dividende.* D'ailleurs (74) nous venons de voir que pour simplifier la division, & par une suite nécessaire de ce qu'on a pratiqué dans la multiplication, on devoit effacer dans le dividende les lettres qui lui sont communes avec le diviseur : mais (50) l'exposant marque combien de fois la lettre sur laquelle il tombe devroit être écrite dans le terme où elle est, & comme on doit effacer cette lettre dans le dividende autant de fois qu'elle est dans le diviseur, il faut donc soustraire l'exposant d'une lettre quelconque du diviseur de l'exposant que la même lettre a dans le dividende, & le reste de cette soustraction sera l'exposant de la même lettre dans le quotient.

Par exemple $\frac{a^3}{a^2} = a$; $\frac{a^3b^2c}{a^2b} = abc$; $\frac{a^5b^3cd^3}{a^2bc} = a^3b^2d^2$; $\frac{a^3b^4}{bc^2} = \frac{a^3b^3}{c^2}$; $\frac{a^6b^3c^7}{a^3b^2c^5} = a^3bc^2$; $\frac{a^3b^2}{a^2b^3} = \frac{a}{b}$.

77 Il eſt évident que ſi le dividende & le diviſeur ſont des monomes ſemblables, l'opération ſe reduira à diviſer le coëfficient du dividende par le coëfficient du diviſeur, & le quotient ſera numérique.

Ainſi $\frac{6a^2bc}{3a^2bc} = 2$, $\frac{5ab}{ab} = 5$, $\frac{12abcd}{3abcd} = 4$, $\frac{abd}{4abd} = \frac{1}{4}$, $\frac{3bcd}{5bcd} = \frac{3}{5}$.

78 Enfin *lorſque le dividende & le diviſeur ſeront affectés des mêmes ſignes, le quotient ſera toujours poſitif*, & doit par conſéquent être précédé du ſigne $+$; *au contraire le quotient ſera négatif* & marqué du ſigne $-$, *toutes les fois que le dividende & le diviſeur ſeront affectés de différens ſignes.*

On aura donc
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{+}{+} = + \\ \frac{+}{-} = - \\ \frac{-}{+} = - \\ \frac{-}{-} = + \end{array}\right.$$

Et en général
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{+}{+} \text{ ou } \frac{-}{-} = + \\ \frac{+}{-} \text{ ou } \frac{-}{+} = - \end{array}\right.$$

$$\text{Ainsi}\begin{cases}\dfrac{+ab}{+a} = +b\\[2ex]\dfrac{+ab}{-a} = -b\\[2ex]\dfrac{-ab}{+a} = -b\\[2ex]\dfrac{-ab}{-a} = +b\end{cases}$$

On pourra se familiariser avec ce principe en l'appliquant à un exemple numérique.

En divisant 2016 par 112, le quotient doit être 18. Or on aura le même resultat en divisant $3072 - 384 - 768 + 96 = 2016$ par $128 - 16 = 112$, pourveu qu'en divisant à l'ordinaire on suive la regle que nous venons de donner pour les signes.

Dividende.	$3072 - 384 - 768 + 96$	$128 - 16$	Diviseur.
		$24 \;\; -6$	Quotient.

Car 1°. $\frac{+3072}{+128} = +24$ & par conséquent $+128 \times +24 = +3072$; & pour soustraire -3072 qui détruira le premier terme $+3072$ du dividende.

2°. $-16 \times +24 = -384$, & pour soustraire $+384$ qui détruit le terme -384.

3°. $\frac{-768}{+128} = -6$ qui sera le second terme du quotient. Donc $+128 \times -6 = -768$; qui par soustraction deviendra $+768$ & détruira le terme -768.

4°. Enfin le second terme du diviseur -16×-6 second terme du quotient, donnera pour produit $+96$ qu'on soustraira de $+96$ reste du dividende.

Le quotient $24 - 6 = 18$, est donc le même qu'on auroit eu en divisant 2016 par 112, & par conséquent en suivant les regles des signes on a le véritable quotient.

79 Donc pour diviser deux polimones algébriques l'un par l'autre, en appliquant les regles données ci-devant pour la division (39) &

celles ci-dessus (74, 75, 76, 77, 78, 79.)

1°. On posera le dividende & le diviseur comme dans la division numérique (39) ensorte que l'un & l'autre soient ordonnés par rapport à une même lettre (64).

2°. On divisera le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur en observant les regles prescrites pour les signes, les coëfficiens, les lettres & les exposans, & on posera sous le diviseur le quotient qui en résultera.

3°. On multipliera le diviseur entier par ce premier terme du quotient, & on soustraira du dividende le produit de cette multiplication.

4°. On cherchera ensuite à diviser un autre terme du dividende par le même premier terme du diviseur, & on continuera à opérer de la même maniére jusqu'à ce qu'on ait divisé tout le dividende par tout le diviseur.

Par exemple pour diviser $8a^2bc - 6ac^2d - 4ab^2d + 3bcd^2$ par $4ab - 3cd$, on posera le dividende & le diviseur comme ci-dessous.

Dividende. $8a^2bc - 6ac^2d - 4ab^2d + 3bcd^2$ | $4ab - 3cd$ Diviseur.
$- 8a^2bc + 6ac^2d$ | $2ac - bd$ Quotient.
$- 4ab^2d + 3bcd^2$
$+ 4ab^2d - 3bcd^2$

Et on dira + *divisé par* + *donne au quotient* +, 8 *divisé par* 4 *donne* 2, a²bc *divisé par* ab *donne* ac, on aura donc $2ac$ ou $+ 2ac$, pour le premier terme du quotient.

On continuera l'opération en multipliant le diviseur $4ab - 3cd$, par le premier terme $2ac$ du quotient, & soustraïant le produit du dividende en cette sorte : + × + = + *& pour soustraire* —, 4 *fois* 2 *sont* 8, ab *par* ac *donne* a²bc, 8a²bc — 8a²bc *se détruisent, j'efface l'un & l'autre*, — × + = — *& pour soustraire* +, 3 *fois* 2 *sont* 6, cd *par* ac *donne* ac²d, *& comme* — 6ac²d + 6ac²d *se détruisent, j'efface ces deux termes.*

On divisera le premier terme $- 4ab^2d$ du reste $- 4ab^2d + 3bcd^2$ par le premier terme $4ab$ du diviseur, en disant — *par* + *donne* — 4 *par* 4 *donne* 1, ab²d *par* ab *donne* bd, & — bd sera le second terme du quotient qu'on multipliera comme le premier, + *par* —, *donne* — *& pour soustraire* +, 4ab *par* bd *donne* 4ab²d, — 4ab²d + 4ab²d *se détruisent réciproquement & doivent être supprimés*, — *par* — *donne* + *& pour soustraire* —, 3 *fois* 1 *sont* 3, cd *par* bd *donne* bcd², + 3bcd² — 3bcd² *se détruisent, je les efface.*

L'opération est faite, & comme il ne reste rien, c'est une preuve

que le dividende $8a^2bc - 6ac\,d - 4ab^2d + 3bcd^2$ contient exactement le diviseur $4ab - 3cd$, un nombre de fois exprimé par $2ac - bd$.

S'il se trouve dans tous les termes du dividende & du diviseur une lettre qui ait par tout le même exposant, on pourra l'effacer dans tous ces termes & continuer la division comme on vient de l'enseigner. Donc si l'on proposoit $a^2n - b^2n$ à diviser par $an + bn$, on effacera n dans tous les termes, & on divisera $a^2 - b^2$ par $a + b$, ce qui donnera pour quotient $a - b$.

EXEMPLES DE LA DIVISION ALGÉBRIQUE.

$$\begin{array}{r|l} 42ag-18bg+24fg+35ax-15bx+20fx-14ay+6by-8fy & 7a-3b+4f \\ -42ag+18bg-24fg \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{6g+5x-2y} \\ \hline +35ax-15bx+20fx-14ay+6by-8fy & \\ -35ax+15bx-20fx \qquad\qquad\qquad\quad & \\ \hline -14ay+6by-8fy & \\ +14ay-6by+8fy & \\ \hline \end{array}$$

Lorsque l'on est parvenu à se rendre la division familière, on ne se donne pas la peine d'écrire les produits qui résultent de la multiplication du diviseur par chaque terme du quotient, on se contente de faire ces produits en soi-même, & d'effacer dans le dividende les termes égaux & semblables à ceux qui résultent de la multiplication du diviseur par le quotient.

Par exemple on fera la division précédente en disant :

1°. $+$ *par* $+$ *donne* $+$, 42 *par* 7 *donne* 6, ag *par* a *donne* g ; 6g est le premier terme du quotient qu'on doit multiplier par le diviseur en cette sorte : $7a \times 6g = 42ag$, *& pour soustraire* $-42ag$: $+42ag - 42ag$ *se détruisent, j'efface le terme* $+42ag$. $-3b \times 6g = -18bg$ *& pour soustraire* $+18bg$. $-18bg + 18bg$ *se détruisent, j'efface le second terme* $-18bg$. $+4f \times 6g = 24fg$, *& pour soustraire* $-24fg$: $+24fg - 24fg$ *se détruisent, j'efface le troisiéme terme* $+24fg$ *du dividende.*

2°. Pour trouver le second terme du quotient, je dirai, $+$ *par* $+$ *donne* $+$. 35 *par* 7 *donne* 5, *ax par a donne x.* Ensuite je multiplie ce second terme $+5ax$ par le diviseur. $7a \times 5x = 35ax$, *& pour soustraire* $-35ax$, $+35ax - 35ax$ *se détruisent, j'efface* $+35ax$. $-3b \times +5x = -15bx$, *& pour soustraire* $+15bx$ *qui détruit* $-15bx$, *je l'efface.* $+4f \times +5x = +20fx$ *& pour soustraire*

$-20fx$, $+20fx-20fx$ *se détruisent*, *je l'efface*.

3°. Enfin je trouverai le troisiéme terme en disant $-$ *par* $+$ *donne* $-$, 14 *par* 7 *donne* 2, ay *par* a *donne* y : & multipliant ce terme $-2y$ par le diviseur, j'aurai $+7a\times-2y=-14ay$, & pour soustraire $+14ay$ qui détruit $-14ay$, que j'efface. $-3b\times-2y=+6by$, & pour soustraire $-6by$; $+6by-6by$ se détruisent, je l'efface. $+4f\times-2y=-8fy$, & pour soustraire $+8fy$; $+8fy-8fy$ se détruisent, je l'efface.

$$42ag-18bg+24fg+35ax-15bx+20fx-14ay+6by-8fy$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 7a-3b+4f & \text{Diviseur.} \\ 69+5x-2y & \text{Quotient.} \end{array}\right.$$

On voit que cette opération ne diffère de la précédente, qu'en ce que dans celle-ci on s'est épargné la peine d'écrire les produits de chaque terme du diviseur par chaque terme du quotient.

Il arrive souvent qu'en multipliant le diviseur par le quotient, il rentre des termes qui n'étoient pas dans le dividende, & quelquefois aussi ces termes sont semblables à quelques-uns des termes du dividende, dont ils ne différent que par leurs coëfficiens. Dans chacun de ces deux cas on soustrait ces termes du dividende, en les y ajoutant avec un signe contraire à celui que donne la multiplication du diviseur par le quotient.

EXEMPLE III.

$$\frac{15a^2b^2-11a^2bc+12a^2c^2+13ab+60ac-72}{+9a^2bc\qquad\qquad -27ab+24ac}\left\{\begin{array}{l} 3ab-4ac+8 \\ \hline 5ab+3ac-9. \end{array}\right.$$

On voit que dans cette opération $-4ac\times5ab$ a donné $-20a^2bc$, qui en soustraïant devient $+20a^2bc$ & qui étant ajouté à $-11a^2bc$ donne le reste $+9a^2bc$. De même $5ab\times8=40ab$ qui soustraits deviennent $-40ab$, & ajoutés avec $+13ab$ détruisent ce terme $+13ab$; & comme $-40+13=-27$, il reste un terme $-27ab$. Enfin $-4ac\times-9=+36ac$ qu'on doit soustraire de $+60ac$, & par conséquent il restera $+24ac$.

Ces termes rentrans sont des termes qui dans la multiplication du diviseur par le quotient, se sont confondus avec d'autres termes semblables.

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{l} a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \left\{ \begin{array}{l} a - b \\ \hline a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 \end{array} \right. \\ \hline + a^3b - a^2b^2 - ab^3 \end{array}$$

Dans celle-ci, les termes $+a^3b$ & $-ab^3$ qui rentrent sont des termes qui ont été détruits dans la multiplication par des termes semblables & égaux affectés de signes contraires. A l'égard du terme $-a^2b^2$, il est clair que le terme $-2a^2b^2$ du dividende a été composé par l'addition des deux termes semblables $-a^2b^2$, $-a^2b^2$.

Ainsi quand il rentrera des termes soit qu'il y en ait déja de semblables dans le dividende, soit qu'il n'y en ait point de semblables, on les ajoutera avec un signe contraire à celui que donnera la multiplication du diviseur par le quotient, c'est-à-dire, qu'on les soustraira du dividende, en écrivant le reste s'il y en a.

EXEMPLE V.

$$\begin{array}{l} 28z^5 + 45z^4 - 28z^3 \quad * \quad + 43z - 18 \left\{ \begin{array}{l} 4z^2 + 3z - 2 \\ \hline 7z^3 + 6z^2 - 8z + 9 \end{array} \right. \\ \hline + 24z^4 - 14z^3 + 12z^2 + 27z \\ - 32z^2 + 36z \end{array}$$

EXEMPLE VI.

$$\begin{array}{l} 24x^5 + 46x^4 + 50x^3 + 69x^2 + 37x + 21 \left\{ \begin{array}{l} 6x^2 + 4x + 3 \\ \hline 4x^3 + 5x^2 + 3x + 7 \end{array} \right. \\ \hline + 30x^4 + 38x^3 + 54x^2 + 28x \\ + 18x^3 + 42x^2 \end{array}$$

EXEMPLE VII.

$$\begin{array}{l} -72y^8 + 110y^7 - 153y^6 + 121y^5 - 115y^4 + 86y^3 - 159y^2 + 102y - 72 \\ \hline + 54y^7 - 105y^6 + 85y^5 - 73y^4 + 62y^3 - 129y^2 + 84y \\ - 63y^6 + 36y^5 - 45y^4 + 27y^3 - 108y^2 \end{array}$$

Diviseur $-9y^2 + 7y - 6$

Quotient $8y^6 - 6y^5 + 7y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 3y + 12$

Lorsqu'en multipliant le diviseur par le quotient, on aura de nouveaux termes semblables à quelques termes du dividende, on pourra se contenter d'écrire leurs coëfficiens précédés de leurs signes, sans ajouter les lettres ni les exposans de ces termes. Par ce moïen on abrégera l'expression, & on diminuera d'autant le travail. Ainsi dans l'Exemple VII. ci-dessus, on auroit

$$-72y^8+110y^7-153y^6+121y^5-115y^4+86y^3-159y^2+102y-72$$

$$+54 \quad -105 \quad +85 \quad -73 \quad +62 \quad -129 \quad +84$$

$$-63 \quad +36 \quad -45 \quad +27 \quad -108$$

Diviseur $-9y^2+7y-6$

Quotient $8y^6-6y^5+7y-4y^3+5y^2-3y+12$

Exemple VIII.

$$-32a^8+52a^7x-61a^6x^2+60a^5x^3-50a^4x^4+40a^3x^5-22a^2x^6+10ax^7-3x^8$$

$$+28 \quad -45 \quad +52 \quad -43 \quad +34 \quad -17 \quad +6$$

$$-24 \quad +38 \quad -31 \quad +24 \quad -9$$

$$+20 \quad -16 \quad +12$$

Diviseur $-4a^3+3a^2x-2ax^2+x$

Quotient $8a^5-7a^4x+6a^3x^2-5a^2x^3+4ax^4-3x^5$

Exemple IX.

$$a^6-6a\,b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b-6ab^5+b^6$$

$$-5 \quad +10 \quad -10 \quad +5 \quad -1$$

Diviseur $a-b$

Quotient $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b$

EXEMPLE X.

$$x^7 + x^6y - 3x^5y^2 - 3x^4y^3 + 3x^3y^4 + 3x^2y^5 - xy^6 - y^7$$

+4	−6	−2	+7	+9	+3
	+6	−14	−11	−3	
		+4	+1		

Diviseur $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Quotient $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

EXEMPLE XI.

$$p^8 - 8p^7s + 28p^6s^2 - 56p^5s^3 + 70p^4s^4 - 56p^3s^5 + 28p^2s^6 - 8ps^7 + s$$

−6	+29	−50	+55	−36	+13	−2
	+15	−20	+15	−6	+1	

Diviseur $p^2 - 2ps + s^2$

Quotient $p^6 - 6p^5s + 15p^4s^2 - 20p^3s^3 + 15p^2s^4 - 6ps^5 + s^6$

Quand une lettre regne dans tout un polinome, & que cette lettre se trouve avoir le même exposant dans plusieurs termes sans que pour cela ces termes soient semblables, on écrit les uns sous les autres tous les termes où la même lettre a le même exposant ; tous ces termes pris ensemble sont regardés comme un seul terme, & tous ceux qui ne contiennent point cette lettre aussi pris ensemble ne sont aussi contés que pour un seul terme.

EXEMPLE XII.

$$16p^6 - 20p^5 + 24p^4 - 28p^3 + 8p^2 - 92p + 23q$$
$$-4p^5q + 5p^4q - 6p^3q + 7p^2q - 2pq + 23x$$
$$-4p^5x + 5p^4x - 6p^3x + 7p^2x - 2px$$

Diviseur $4p - q - x$

Quotient $4p^5 - 5p^4 + 6p^3 - 7p^2 + 2p - 23$

80 On se sert encore quelquefois d'une autre méthode de division : surtout lorsque le dividende & le diviseur sont trop compliqués pour qu'on puisse appercevoir au premier coup d'œil quels seront les coëfficiens des termes du quotient.

Cette division se fait par une fausse position, elle est moins difficile mais beaucoup plus longue que la précédente.

Pour opérer suivant cette méthode, soit proposé le dividende de l'Exemple XII. à diviser par $4p - q - x$ son diviseur.

Après avoir écrit le dividende & le diviseur à l'ordinaire, on divisera la plus haute dimension de la lettre regnante dans le dividende, par la plus haute dimension de la même lettre dans le diviseur, & plaçant le quotient au quotient, on y ajoutera les dimensions inférieures de la même lettre jusqu'à la dimension o ou jusqu'à l'unité : on supposera à chacune de ces dimensions des coëfficiens indéterminés, on multipliera le diviseur ~~proposé par le quotient supposé~~, & on égalera chaque terme de ce produit au terme du dividende qui contient la même dimension de la lettre regnante, & en réduisant, on trouvera le véritable coëfficient de chacun de ces termes.

$$\begin{array}{l|l} 16p^6 - 20p^5 + 24p^4 - 28p^3 + 8p^2 - 92p + 23q & 4p - q - x \\ \quad - 4p^5q + 5p^4q - 6p^3q + 7p^2q - 2pq + 23x & p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 \\ \quad - 4p^5x + 5p^4x - 6p^3x + 7p^2x - 2px & a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ g, \\ \hline 4ap^6 + 4bp^5 + 4cp^4 + 4dp^3 + 4fp^2 + 4gp & ap^5 + bp^4 + cp^3 + dp^2 + fp + g \\ \quad - aqp^5 - bqp^4 - cqp^3 - dqp^2 - fqp - gq & \\ \quad - axp^5 - bxp^4 - cxp^3 - dxp^2 - fxp - gx & \end{array}$$

Donc 1°. $4ap^6 = 16p^6$, ou $4a = 16$, donc $a = 4$, donc $ap^5 = 4p^5$.

Donc 2°. $4bp^5 - aqp^5 - axp^5 = -20p^5 - 4qp^5 - 4xp^5$, ou $4b - aq - ax = -20 - 4q - 4x$, ou $4b - 4q - 4x = -20 - 4q - 4x$, ou $4b = -20$, donc $b = -5$. Donc $+ bp^4 = -5p^4$.

Donc 3°. $4cp^4 - bqp^4 - bxp^4 = 24p^4 + 5qp^4 + 5xp^4$, ou $4c - bq - bx = 24 + 5q + 5x$, ou $4c + 5q + 5x = 24 + 5q + 5x$ ou $4c = 24$, donc $c = 6$. Donc $+ cp^3 = + 6p^3$.

Donc 4°. $4dp^3 - cqp^3 - cxp^3 = -28p^3 - 6qp^3 - 6xp^3$, ou $4d - cq - cx = -28 - 6q - 6x$, ou $4d - 6q - 6x = -28 - 6q - 6x$, ou $4d = -28$, donc $d = -7$. Donc $+ dp^2 = -7p^2$.

Donc 5°. $4fp^2 - dqp^2 - dxp^2 = 8p^2 + 7qp^2 + 7xp^2$, ou $4f - dq - dx = 8 + 7q + 7x$, ou $4f + 7q + 7x = 8 + 7q + 7x$, ou $4f = 8$, donc $f = 2$. Donc $+ fp = + 2p$.

Donc 6°. $4gp - fqp - fxp = - 92p - 2qp - 2xp$, ou $4g - fq - fx = - 92 - 2q - 2x$, ou $4g - 2q - 2x = - 92 - 2q - 2x$, ou $4g = - 92$, donc $g = - 23$.

Donc 7°. $-gq - gx = + 23q + 23x$, & comme (6°.) $g = - 23$; $- g = 23$, & $-gq - gx = 23q + 23x$; c'est-à-dire, que le coëfficient de ce dernier terme est l'unité.

Donc le véritable quotient est $4p^5 - 5p^4 + 6p^3 - 7p^2 + 2p - 23$; ce qu'on vérifiera en multipliant ce quotient par le diviseur $4p - q - x$.

81 On remarquera dans cette maniere de diviser, que

1°. On pourra toujours trouver du premier coup la valeur absolue du coëfficient du premier terme du quotient, en divisant le coëfficient du premier terme du dividende par le coëfficient du premier terme du diviseur, & par conséquent on évitera un calcul inutil, en substituant cette valeur absolue à la valeur indéterminée qu'on peut lui supposer.

2°. Quand on sçaura que la division doit être exacte, on trouvera de même le coëfficient du dernier terme, ou plutôt on trouvera ce dernier terme entier, puisqu'il ne contient point la lettre regnante dans le polinome, ou qu'il la contient avec un exposant o. Pour cet effet on divisera le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur, & le quotient qui en résultera sera le dernier terme du quotient cherché.

3°. Lorsque dans le dividende proposé il manque quelque dimension de la lettre qui y regne & par laquelle on l'a ordonné, on multiplie comme nous avons dit ci-dessus (80) le diviseur par le quotient supposé, & comme il vient nécessairement au produit un terme (soit monome ou polinome) où cette lettre a l'exposant qui manque dans le dividende, & que ce terme doit être affecté de coëfficiens qui se détruisent, puisqu'il est anéanti dans le dividende, on suppose ce terme du faux produit égal à zero, & substituant, comme dans les autres cas, les valeurs connues des coëfficiens que l'opération aura déja donnés, on trouvera la valeur du coëfficient qui répond au terme dont il s'agit.

4°. On supposera toujours le signe + aux coëfficiens indéterminés, ensorte que tous les termes du faux quotient seront positifs, ce qui ne change en rien la valeur des vrais coëfficiens; car lorsqu'en

comparant ainsi un terme du faux produit avec un terme du dividende, on trouvera comme ci-dessus (80. 2°.) $4b = -20$, ou $b = -5$, il est évident que le coëfficient 5 doit être affecté du signe $-$, quoique le terme supposé $4b$ soit positif.

5°. Il n'est pas nécessaire de multiplier le diviseur par le quotient pour s'assurer de la bonté d'une semblable division, soit qu'elle se fasse exactement ou qu'il y ait un reste, car en substituant dans tous les termes du faux produit les valeurs absolues des coëfficiens, ce produit ainsi changé rétablira le dividende si l'on a bien operé & si la division peut se faire exactement; sinon en soustraïant ce produit sur le dividende, on trouvera le reste qu'on mettra à la suite du quotient que l'opération a donné en quantités entieres, en écrivant le diviseur au-dessous avec une ligne entre-deux (38). Cette quantité qu'on appelle une *fraction algébrique*, sorte de grandeur dont nous parlerons dans la suite, sera le supplément du vrai quotient de la division proposée.

6°. On peut abréger l'opération en ne comparant qu'autant de termes qu'on a de coëfficiens à trouver: ainsi dans l'opération précédente, nous aurions pu nous dispenser de comparer le septiéme terme $-gq-gx$ du faux produit avec le septiéme terme $23q+23x$ du dividende, parce que ce dernier terme ne contenoit point la lettre z, & ne devoit par conséquent avoir d'autre coëfficient que l'unité, en sorte qu'il suffisoit de comparer les six premiers termes de part & d'autre.

Nous appliquerons ces principes dans les opérations suivantes à mesure que nous en aurons occasion.

EXEMPLE XIII.

$$6p^7-20p+50p^5-64p^4+64p^3-48p^2+8pq-qs$$
$$-3p^4s+2p^5q-4p^2q+6ps$$
$$+4p^3s-5p^2s$$

$2p^3-4p^2+8p-s$

$p^4,\ p^3,\ p^2,\ p^1,\ p^0.$

$a,\ b,\ c,$

$3p^4+ap^3+bp^2+cp+1$

Faux quotient $3p^4+ap^3+bp^2+cp+1$

Diviseur $2p^3-4p^2+8p-s$

$$6p^7+2ap^6+2p^5b+2p^4c+2p^3$$
$$-12p^6-4ap^5-4bp^4-4cp^3-4p^2$$
$$+24p^5+8ap^4+8bp^3+8cp^2+8p$$
$$-3p^4s-ap^3s-bp^2s-cps-s$$

Faux produit.

1°. $6p^7 = 6p^7$.

2°. $2ap^6 - 12p^6 = -20p^6$, ou $2a - 12 = -20$, ou $2a = -8$, donc $a = -4$.

3°. $24p^5 + 2bp^5 - 4ap^5 = 50p^5$, ou $24 + 2b - 4a = 50$, ou $24 - 4a + 2b = 50$, ou $24 + 16 + 2b = 50$, ou $40 + 2b = 50$, Donc $b = 5$.

4°. $8ap^4 - 4bp^4 + 2cp^4 - 3p^4s = -64p^4 - 3p^4s$, ou $8a - 4b + 2c = -64$, ou $-32 - 20 + 2c = -64$, ou $2c = 52 - 64$, ou $2c = -12$, donc $c = -6$.

En ſubſtituant dans le produit ſupoſé, les valeurs des coëfficiens indéterminés, on trouvera que le produit eſt le même que le dividende. Car le dernier terme $-qs$ du dividende diviſé par le dernier terme $-s$ du diviſeur, donnera $+q$ pour le dernier terme du quotient.

Ainſi le quotient véritable ſera $3p^4 - 4p^3 + 5p^2 - 6p + q$, & comme le produit ſupoſé affecté de ſes vrais coëfficiens ſe trouvera égal & ſemblable au dividende, & qu'il ne manquera ni ne reſtera rien de part ni d'autre, on n'aura pas beſoin de ſe donner la peine de multiplier le diviſeur propoſé par le quotient trouvé pour juger de l'exactitude de l'opération.

Lors qu'il manque dans un polinome quelques dimenſions de la lettre régnante, on ſubſtitue ordinairement une étoile à la place de chaque terme.

EXEMPLE XIV.

Soit $27a^7 \; * \; -93a^5 + 9a^4 - 118a^3 + 150a^2 + 25ap - pq$
$-9a^4p + 12a^3p - 3a^2p - 6aq$
$+ 3a^3q + 4a^2q$

à diviſer par $3a^3 + 4a^2 - 6a - p$
on aura $9a^4, a^3, a^2, a, 1$, pour dimenſions de a,
& m, n, s, pour leurs coëfficiens.
enſorte que $9a^4 + ma^3 + na^2 + sa + 1$ ſera le faux quotient
qu'on multipliera par le diviſeur } $3a^3 + 4a^2 - 6a - p$.

$$27a^7 + 3ma^6 + 3na^5 + 3sa^4 + 3a^3$$
$$+ 36a^6 + 4ma^5 + 4na^4 + 4sa^3 + 4a^2$$
$$- 54a^5 - 6ma^4 - 6na^3 - 6sa^2 - 6a$$
$$- 9a^4p - ma^3p - na^2p - sap - p.$$

On aura donc 1°. $27a^7 = 27a^7$.

2°. $3ma^6 + 36a^6 = 0$, ou $3m + 36 = 0$, ou $m + 12 = 0$, & par conséquent $m = -12$.

3°. $3na^5 + 4ma^5 - 54a^5 = -93a^5$, ou $3n + 4m - 54 = -93$, ou $3n + 48 - 54 = -93$, ou $3n - 102 = -93$, ou $3n = 102 - 93$, ou $3n = 9$, donc $n = 3$.

4°. $3sa^4 + 4na^4 - 6ma^4 - 9a^4p = 9a^4 - 9a^4p$, ou $3s + 4n - 6m = 9$, ou $3s + 12 + 72 = 9$, ou $3s = 9 - 84$, ou $3s = -75$, donc $s = -25$.

On aura donc pour vrai quotient $9a^4 - 12a^3 + 3a^2 - 25a + q$, car le dernier terme $-pq$ du dividende divisé par $-p$ dernier terme du diviseur donne $+q$ pour le dernier terme du quotient, & comme en substituant dans le faux produit les coëfficiens trouvés, ce qui en résultera sera égal & semblable au dividende, on se convaincra de l'exactitude de l'opération.

EXEMPLE XV.

$$\begin{array}{l|l}
28x^5 + 45x^4 - 28x^3 \quad * \quad + 55x - 26 & 4x^2 + 3x - 2 \\
\hline
 & x^3,\ x^2,\ x,\ 1 \\
7x^3 + ax^2 + bx + 1 & a,\ b, \\
4x^2 + 3x - 2 & 7x^3 + ax^2 + bx + 1 \\
\hline
28x^5 + 4ax^4 + 4bx^3 + 4x^2 & \\
\quad + 21x^4 + 3ax^3 + 3bx^2 + 3x & \\
\quad\quad - 14x^3 - 2ax^2 - 2bx - 2 &
\end{array}$$

1°. $28x^5 = 28x^5$, ce qui ne donne rien.

2°. $4ax^4 + 21x^4 = 45x^4$, ou $4a + 21 = 45$, ou $4a = 24$ donc $a = 6$.

3°. $4bx^3 + 3ax^3 - 14x^3 = -28x^3$, ou $4b + 3a - 14 = -28$, ou $4b + 18 - 14 = -28$, ou $4b + 4 = -28$, ou $4b = -32$, donc $b = -8$.

En continuant les comparaisons, on trouvera que le produit supposé n'est pas égal au dividende, & en le retranchant de ce dividende, on aura un reste $= 12x - 8$, en sorte que le quotient entier de la division proposée sera $7x^3 + 6x^2 - 8x + 9 + \dfrac{12x - 8}{4x^2 + 3x - 2}$.

82 On peut éviter les divisions algébriques impossibles en faisant les remarques suivantes.

1°. S'il y a moins de termes au dividende qu'au diviseur, & qu'une lettre commune à tous deux n'ait point d'exposant plus grand dans le dividende que dans le diviseur, il n'est pas possible de faire la division exactement; ainsi si l'on a le dividende p^2q+mn^3, à diviser par p^2q+mn^2+pmn; comme la lettre q a le même exposant dans le dividende & dans le diviseur, le quotient qui résulteroit de cette division seroit simple, & si l'on multiplie le diviseur par ce quotient, soustraïant le produit du dividende il y aura un reste dans lequel la lettre q ne se trouvera point, & par conséquent la division exacte sera impossible.

2°. Lorsqu'il y aura dans le diviseur quelque lettre qui ne sera pas dans le dividende, il sera encore impossible de diviser exactement, par exemple soit le diviseur $2p^2-3pq+5sm$, & le dividende $8p^3q-6p^2q^2+10mn^3$, on tenteroit inutilement cette division; car tel quotient qu'on pût avoir, comme en multipliant le diviseur par le quotient on auroit dans le produit trois termes qui contiendroient la lettre s qui n'est point dans le dividende, il est évident que ce produit ne seroit jamais semblable au dividende, & par conséquent la division exacte est impossible.

3°. Si tous les termes du dividende étant positifs, il y a dans le diviseur des termes positifs, & des termes négatifs, il n'est pas possible de diviser l'un par l'autre exactement : car en multipliant le diviseur par le quotient, il se trouvera dans le produit des signes différens, & comme le dividende est supposé avoir le signe + à tous ses termes, ce produit ne pourra jamais lui être égal, par conséquent on ne pourra pas diviser p^3+q^3 par $p-q$.

4°. Si une même lettre se trouve plus élevée dans le diviseur que dans le dividende, le quotient le plus exact ne pourra encore être qu'une fraction : ainsi en divisant $8p^3q+54p^2q^2$ par $4p^5+27p^4q$, le quotient sera la fraction $\frac{2q}{p^2}$.

5°. Si le dernier terme du dividende ne peut pas être exactement divisé par le dernier terme du diviseur (supposant ces deux quantités bien ordonnées par rapport à une même lettre) la division ne pourra se faire exactement.

Dans ces différens cas; c'est-à-dire, lorsque la division ne pourra être exacte, on se contentera de l'indiquer, comme nous avons vû

ci-dessus (73.) en écrivant le diviseur sous le dividende avec une ligne entre-deux.

Cependant il est quelquefois avantageux dans une division impossible, d'avoir un autre quotient que celui qui ne fait qu'indiquer l'opération. On parvient dans ce cas à trouver pour quotient une suite infinie de termes qui approchent à l'infini de la véritable valeur du quotient; mais comme cette opération exige la connoissance du calcul des fractions, nous la donnerons ci-après à la fin du calcul des fractions génériques.

Démonstration.

Il est évident que l'indication de la division n'est autre chose que l'usage d'un signe convenu, & dont on n'a rien de plus à dire.

Nous diviserons cette démonstration en quatre parties comme celle de la multiplication.

I°. En vertu de la convention d'écrire dans le produit d'une multiplication, l'une à côté de l'autre, & en forme de sillabes les lettres qui composent les produisans, on doit dans la division effacer dans le dividende les lettres qui lui sont communes avec le diviseur, puisque dans cette opération on décompose ce qu'on a composé dans la précédente. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

II°. On doit diviser le coëfficient du dividende par le coëfficient du diviseur, car on doit diviser le dividende entier par le diviseur entier, & si l'on ne divisoit pas les coëfficiens, on ne diviseroit pas le dividende entier, & par conséquent on contreviendroit aux regles données pour cette opération (39.). Donc il faut diviser les coëfficiens. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

III°. On doit soustraire l'exposant d'une lettre du diviseur de l'exposant de la lettre semblable du dividende; car (50.) l'exposant fait voir le nombre de fois que la lettre qui en est affectée devroit être écrite dans le terme où elle est, & si elle est écrite dans le dividende un nombre de fois exprimé par m, & que l'on supose $= n$ le nombre de fois qu'elle est écrite dans le diviseur, il faudra (1°.) effacer cette lettre dans le dividende un nombre de fois égal à n: & par conséquent elle n'y sera plus écrite qu'un nombre de fois $= m - n$, donc l'exposant sera $= m - n$ (50). Donc on doit soustraire les exposans. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.*

IV°. Nous avons vû (38) que le diviseur multiplié par le quotient devoit rétablir le dividende, que $+ \times + $ ou $- \times - = +$ & que $+ \times -$ ou $- \times + = -$ (71.)

Donc 1°. $\frac{+ps}{+p} = +s$; car du positif divisé par du positif ne peut donner au quotient que du positif; d'ailleurs en multipliant le diviseur $+p$, par le quotient $+s$, on rétablira le dividende $+ps$. Donc $\frac{+}{+} = +$.

2°. Si le dividende est positif & le diviseur négatif, le quotient sera négatif, ainsi $\frac{+ps}{-p} = -s$; car en multipliant le diviseur $-p$ par le quotient $-s$, on aura au produit $+ps$ (71). Donc $\frac{+}{-} = -$.

3°. Si au contraire le dividende étant négatif, le diviseur est positif, le quotient sera aussi négatif : par exemple, $\frac{-ps}{+p} = -s$, car on aura $+p \times -s = -ps$ (71). Donc $\frac{-}{+} = -$.

4°. Enfin, quand le dividende & le diviseur seront tous deux négatifs, le quotient sera positif; c'est-à-dire, que $\frac{-ps}{-p} = +s$, car $-p \times +s = -ps$ (71). Donc $\frac{-}{-} = +$.

Donc en général quand le dividende & le diviseur auront le même signe, le quotient aura le signe $+$, au contraire il sera affecté du signe $-$ quand le dividende & le diviseur auront des signes différens. *Ce qu'il falloit 4°. démontrer.*

AVERTISSEMENT.

Comme la plus grande partie de ce qui nous reste à dire du Calcul, peut également convenir à l'Algebre, & à l'Arithmétique; pour en faciliter l'intelligence, & éviter les répetitions inutiles, nous considérerons en même tems dans la suite de ce Livre les grandeurs algébriques & numériques; & à mesure que nous aurons expliqué quelque regle que ce soit, nous l'appliquerons par des exemples à chacune de ces deux especes de Calcul, autant que cette application sera possible,



CHAPITRE III.

Des Fractions en général.

LORSQUE que l'on veut divifer une quantité quelconque par une autre quantité plus grande qu'elle, il eft évident que le quotient loin d'être plus grand que l'unité, ne peut même lui être égal, puifque le dividende étant plus petit que le divifeur, ne peut pas le contenir une fois.

Dans ce cas le quotient fera donc moindre que l'unité (32 & 38).

Pour aprécier la valeur de ce quotient, on divife l'unité principale en autant de parties égales que le divifeur contient d'unités, en forte que chacune de ces parties puiffe être exprimée par une divifion indiquée dans laquelle l'unité principale prife pour dividende eft cenfée divifée par le divifeur propofé, & prenant autant de ces parties égales que le dividende propofé contient d'unités, la quantité réfultante eft le quotient demandé.

Par exemple fi l'on veut divifer 3 par 4, comme le divifeur 4 eft plus grand que le dividende 3, on divifera l'unité principale en quatre parties égales, & l'on aura $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (*ax.* 3), & comme le dividende 3 indique qu'il faut prendre trois de ces parties égales, on aura $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ pour le quotient.

Chacune de ces parties égales s'apelle *unité fractionnaire*, & comme l'unité principale égale à la fomme des unités fractionnaires qui la divifent (*hip.*), contient chacune d'elles exactement & fans refte autant de fois que le divifeur contient d'unités, cette même unité principale eft multiple de l'unité fractionnaire, & réciproquement l'unité fractionnaire eft aliquote de l'unité principale.

Nous avons vû (10) que l'on appelle *fraction* tout nombre qui contient une ou plufieurs parties aliquotes de l'unité.

83 1°. Ainfi les fractions numériques peuvent être regardées comme des quotiens de divifions dans lefquelles le dividende eft moindre que le divifeur.

Mais la même chofe ne peut manquer d'arriver fur les grandeurs algébriques, lorfque le divifeur ne fera pas contenu dans le dividende,

ainsi $\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$; d'ailleurs (73) lorsque le dividende & le diviseur algébriques ne contiennent ni termes semblables, ni lettres semblables dans des termes différens, soit que le dividende soit plus petit ou plus grand que le diviseur, comme ce diviseur ne paroît pas contenu dans son dividende, on ne peut faire la division réelle; on est obligé de se contenter de l'indiquer, & cette division indiquée est une véritable fraction algébrique, par exemple $\frac{a}{b}$.

2°. Donc les fractions algébriques sont des quotiens de divisions dans lesquelles le dividende ne peut être exactement divisé par le diviseur, ou parce qu'il est plus petit que ce diviseur, ou parce qu'on ne connoît pas le raport qui est entre eux.

84 Dans l'un ou l'autre de ces deux cas on écrit le diviseur sous le dividende avec une ligne entre-deux.

La quantité qu'on écrit sur la ligne & qui exprime le dividende s'appelle *numérateur* ou *premier terme de la fraction*, & le diviseur qu'on écrit au-dessous, est appellé *dénominateur de la fraction* ou son *second terme*.

Ainsi dans les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{a}{b}$, 2 & *a* sont les numérateurs de ces fractions dont 3 & *b* sont les dénominateurs.

Le dénominateur indique en combien de parties égales on suppose l'unité principale partagée, & le numérateur marque combien on prend de ces parties égales ou unités fractionnaires.

85 ***Donc toute fraction contient l'unité comme le numérateur de la fraction contient son dénominateur.***

On peut prouver d'une maniere bien simple que le reste d'une division imparfaite est nécessairement le numérateur d'une fraction à laquelle le diviseur sert de dénominateur; par exemple si l'on veut diviser 42 par 9 on pourra exprimer cette division par la fraction $\frac{42}{9}$, mais $\frac{42}{9} = \frac{36}{9} + \frac{6}{9} = 4 + \frac{6}{9}$; car la premiere partie $\frac{36}{9}$ se peut réduire à l'entier 4, puisque $36 = 9 \times 4$. Donc le quotient entier sera $4 + \frac{6}{9}$. De même en divisant $ab + d$ par b, on aura $\frac{ab+d}{b} = \frac{ab}{b} + \frac{d}{b} = a + \frac{d}{b}$

86 On remarquera qu'on peut toujours séparer une fraction en autant d'autres fractions, que le numérateur de la fraction proposée contiendra de parties, pourvû qu'à chacune on donne pour second terme

le dénominateur entier. Par ex. $\frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ mais on ne pourroit pas séparer la fraction $\frac{5}{6} = \frac{3+2}{3+3} = \frac{3+2}{4+2} = \frac{4+1}{3+3} = \frac{4+1}{4+2}$, &c. en d'autres fractions $\frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} + \frac{2}{2} = 1\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$, $\frac{4}{4} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$, &c. sans en changer la valeur, puisque les sommes $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, &c. qui en résultent sont différentes entre elles, & que chacune d'elles différe de la fraction proposée $\frac{5}{6}$ qui est moindre que l'unité (85).

On pourroit de même séparer une fraction algébrique en plusieurs autres fractions, en conservant à chacune le dénominateur de la premiere. Ainsi $\frac{ab+bc+cd}{ac+bd} = \frac{ab}{ac+bd} + \frac{bc}{ac+bd} + \frac{cd}{ac+bd}$; mais on en changera la valeur, si on ne met qu'une partie du premier dénominateur à quelqu'une des parties du numérateur. Par exemple les fractions $\frac{ab+bc}{ac} + \frac{cd}{bd}$ ne feront pas égales à la fraction totale $\frac{ab+bc+cd}{ac+bd}$.

Il est aisé d'en sentir la raison. Soit qu'on sépare la fraction en plusieurs autres, soit qu'on ne la sépare pas, on conserve toujours le même numérateur, par conséquent on a toujours le même nombre de parties : mais ces parties changeront de valeur & deviendront plus grandes, dès qu'on les divisera par des diviseurs plus petits : or en séparant le dénominateur en plusieurs parties, chacune d'elles devient nécessairement un diviseur moindre que le diviseur proposé dont elle est partie ; le quotient qui en résulte est donc plus grand. On prendroit donc un même nombre de parties plus grandes, & par conséquent on auroit une valeur plus grande que celle de la fraction proposée.

Donc en séparant une fraction en plusieurs autres fractions, il faudra donner à chacune le dénominateur entier de la fraction proposée.

On exprime une fraction numérique comme

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$

par *un-demi*, *deux-tiers*, *trois-quarts*, *quatre-cinquiémes*, on sous entend *de l'unité* : car (83 & 85) ces fractions montrent qu'aïant partagé l'unité principale en 2, 3, 4, 5 &c. parties égales, on doit prendre une, deux, trois ou quatre de ces parties aliquotes de l'unité.

Une fraction algébrique telle que $\frac{a}{b}$ se lit *a divisé par b*; on les exprime ainsi parce que toute fraction algébrique doit être regardée comme le quotient d'une division indiquée, & réciproquement toute division indiquée peut être prise pour une fraction.

Lorſqu'une grandeur ſoit numérique ſoit algébrique eſt compoſée d'entiers & de fractions, comme $2\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{5}$, $a + \frac{m}{n}$, il eſt ſouvent plus commode de réduire le tout en une ſeule fraction, ſoit pour calculer plus facilement ces quantités, ſoit pour connoître plus diſtinctement le rapport qu'elles ont avec d'autres grandeurs : par conſéquent on peut avoir des fractions dans leſquelles le numérateur ſoit plus grand que le dénominateur : & ces grandeurs mixtes ainſi réduites ſeront régardées comme des fractions.

On trouvera encore quelquefois des fractions d'entiers, des fractions de fractions, & des fractions de mixtes ; par exemple on peut demander *les deux-cinquiémes de ſept*, *les trois-quarts de deux-tiers*, *les ſept-dixiémes de deux-tiers* ; mais comme ces ſortes de fractions peuvent toujours (ainſi que nous le verrons dans la ſuite) ſe réduire à des fractions de l'unité principale, on les y réduit, & on les calcule enſuite comme les autres fractions.

Il eſt évident que la fraction ſera d'autant plus grande que ſon numérateur ſera plus grand & ſon dénominateur plus petit ; car le quotient qu'elle repréſente exprime comment le diviſeur eſt contenu dans le dividende, & il y ſera contenu davantage à proportion qu'il ſera moindre que lui. Au contraire la fraction ſera d'autant plus petite que le numérateur ſera plus petit & le dénominateur plus grand, puiſqu'alors le diviſeur plus grand ſera moins contenu dans le dividende plus petit. Pour en donner une idée plus familiere, ſi un pere en mourant laiſſe 100000# de bien, & dix enfans à partager ſa ſucceſſion, chacun aura un dixiéme de ce bien, ou $\frac{100000\#}{10} = 10000\#$; mais s'il n'avoit que deux héritiers, chacun des deux auroit la moitié de l'héritage entier ou $\frac{100000\#}{2} = 50000\#$ puiſque l'objet du partage ſera le dividende ou le numérateur, le nombre des partageans ſera le diviſeur ou le dénominateur, & la part de chacun ſera la fraction réſultante ou le quotient :

87 *Donc les fractions qui ont même dénominateur ſont entre elles comme leurs numérateurs : & au contraire des fractions qui ont même numérateur ſont entre elles à rebours de leurs dénominateurs.*

88. Lorſque l'on connoîtra le raport du numérateur au dénominateur : c'eſt-à-dire dans toutes les fractions numériques en général, & en particulier dans les fractions algébriques dont les termes ſeront des grandeurs connues, (comme ces fractions pourront être réduites à des fractions numériques) on nommera *fractions défaillantes*, celles qui ſeront moindres que l'unité ; comme $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{a}{a^2}$; car le dénominateur étant

plus grand que son numérateur, le quotient est moindre que l'unité. Celles dont les termes seront égaux (le calcul ne peut donner de semblables) seront appellées *fractions adéquantes*, parce que ces fractions telles que $\frac{4}{4}$, $\frac{a}{a}$ &c. sont égales à l'unité. Enfin celles qui seront plus grandes que l'unité, c'est-à-dire celle dont le numérateur surpassera le dénominateur seront nommées *fractions exeédentes*. Par exemple les fractions $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{2ab^2+c}{2b}$ qui peuvent être les résultats des quantités mixtes $1\frac{2}{5}$, $2\frac{1}{9}$, $ab+\frac{c}{2b}$ réduites en fractions; car ces fractions sont plus grandes que l'unité.

On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les grandeurs entieres; mais comme quelques unes de ces opérations exigent différentes préparations dans lesquelles il s'agit de changer les termes d'une fraction sans rien ajouter ni retrancher à la valeur de cette fraction, nous commencerons par examiner toutes les variations dont ces grandeurs sont susceptibles, & pour ainsi dire toutes les figures qu'elles peuvent recevoir sans changer de valeurs.

Pour cet effet nous diviserons le calcul des fractions selon les deux sortes d'opérations qui leur sont propres, & après que nous aurons expliqué les préparations ou *opérations accessoires*, nous passerons aux *opérations principales* dans lesquelles nous ferons l'application des premieres.

DES OPERATIONS ACCESSOIRES AU CALCUL DES FRACTIONS.

89 1°. Un nombre qui n'a point d'autre aliquote que lui même ou l'unité, c'est-à-dire qui ne peut se diviser exactement par aucun autre nombre s'apelle *nombre primitif*. Par ex. les nombres 1, 2, 3, 5, 7, &c. sont primitifs.

2°. Tout autre nombre c'est-à-dire tout nombre qui peut être exactement divisé par quelqu'autre nombre s'appelle *nombre composé*, tels sont les nombres 4, 6, 8, 9, 10, &c.

3°. On appelle *diviseur primitif* d'une grandeur, tout nombre primitif aliquote de cette grandeur. Tout autre diviseur de la même quantité se nomme *diviseur composé* de cette quantité. Par exemple 3, 5, 7 sont les seuls diviseurs primitifs de 105 : 15 & 21 en sont des diviseurs composés.

4°. Deux

4°. Deux ou plusieurs nombres qui n'ont aucune aliquote commune, c'est-à-dire qui ne peuvent être exactement divisés par un même nombre sont nommés *nombres primitifs entre eux* : si ces nombres tels que 5, 7, 11, sont primitifs en eux-mêmes, il seront à plus forte raison primitifs entre eux. Si l'un d'eux est primitif, il sera aussi primitif rélativement à tout nombre composé dont il ne sera pas aliquote, & par conséquent ces nombres seront relativement primitifs entre eux, comme les nombres 5, 9, 14, dont le premier est primitif & n'est aliquote d'aucun des deux nombres composés 9 & 14. Enfin deux ou plusieurs nombres composés seront primitifs entre eux quand il n'auront aucune aliquote commune : par exemple, les nombres 9, 16 & 25 qui n'ont pour aliquotes que les nombres différens 3, 2, 4, 8 & 5.

On pourra dire la même chose des grandeurs algébriques, tant qu'on les considerera généralement, & par raport aux caracteres qui les expriment, sans avoir égard aux valeurs différentes qu'elles peuvent avoir dans le calcul : ainsi les grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *m*, *n*, &c. sont primitives ; & *ab*, *bc*, *cd*, *dm*, *mn*, sont des quantités composées. Les grandeurs composées *ab*, *cd*, *mn*, sont primitives entre elles, & les grandeurs *ab*, *bc*, *bd*, *bm*, *bn*, qui ont un diviseur commun ou une aliquote commune *b*, ne sont pas primitives entre-elles.

90 *Pour trouver tous les nombres primitifs jusqu'à un nombre donné* par exemple jusqu'à 1000, 10000, 100000, &c.

On posera par ordre dans une table tous les nombres depuis 1 jusqu'au nombre donné 1000, & on effacera de cette table tous les nombres composés en faisant les observations suivantes.

1°. Tout nombre pair est multiple de 2 : ainsi 2 est le seul nombre pair primitif ; par conséquent on pourra effacer tous les nombres pairs plus grands que 2.

2°. Tous les multiples de 3 sont disposés de 3 en 3.

3°. Ceux de 5 le sont de 5 en 5, ceux de 7, de 7 en 7, &c. on pourra donc effacer tous les nombres multiples de 3, de 5, de 7, &c ; mais on ne commencera qu'au carré de chaque nombre primitif 3, 5, 7, &c. parce que les multiples de ces nombres qui sont plus petits que leurs carrés, auront déja été effacés comme multiples de 2, de 3, de 5, &c.

Mais on peut extrêmement abréger & simplifier cette opération, en ne mettant dans la table aucun nombre pair, & posant des points

au lieu des nombres impairs comme dans la table suivante, plaçant au dessus de chaque colomne les cinq nombres impairs moindres que dix sçavoir : 1, 3, 5, 7, 9, & à côté de chaque rangée les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à 99; car en joignant le chifre qui est au dessus d'un certain point à celui qui est devant ce point, on aura le nombre dont ce point tient la place.

Ainsi les points qui se trouvent dans le premier rang tiennent la place des nombres 1, 3, 5, 7, qui sont au dessus: car ce rang n'étant précedé que de zero ou *o*, les chiffres 1, 3, 5, 7, qui suivent le *o*, ne seront point augmentés par cette addition.

Au contraire dans le second rang, les points tiennent la place de 11, 13, 17, 19; car en écrivant les chiffres 1, 3, 7, 9, qui sont au dessus de ces points, après le chiffre 1 qui précede le rang entier, on aura 11, 13, 17, 19.

On voit de même que les points qui sont dans le troisiéme rang, tiennent la place l'un de 23, & l'autre de 29.

Toute la table suit le même ordre.

On opérera sur ces points comme on feroit sur les nombres mêmes dont ils tiennent la place, & au lieu des points qui se trouveroient à la place des multiples de 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c. on mettra les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, &c. pourvû que ces places ne soient pas deja occupées par quelqu'une des lettres précedentes, & on commencera à poser chacune de ces lettres au carré du nombre primitif dont elles représentent les multiples.

On trouvera que les lettres *a* vont en diagonale, que les lettres *b* sont toutes comprises dans la colomne du milieu; & d'autres facilités qui diminueront la longueur de l'opération.

Puisque *a* doit tenir la place des multiples de 3, on mettra *a* dans la derniere colomne & au premier rang, pour representer $9 = 3 \times 3$.

La même lettre *a* dans le second rang, & à la troisiéme colomne exprimera $15 = 3 \times 5$, parce que 15 est un multiple de 3 & de 5, plus petit que 25 quarré de 5; & ce n'est qu'à ce quarré 25, qu'on commencera à emploïer la lettre *b*, qui doit remplacer les multiples de 5.

De même le premier nombre remplacé par la lettre *c*, sera 49 quarré de 7; 121 quarré de 11 sera le premier nombre marqué par *d*; 169 quarré de 13 sera le premier qu'on exprimera par la lettre *e*; &c.

	1	3	5	7	9		1	3	5	7	9		1	3	5	7	9
0	.	.	.	.	a	34	d	c	a	.	.	68	a	.	b	a	e
1	.	.	a	.	.	35	a	.	b	a	.	69	.	a	b	f	a
2	a	.	b	a	.	36	g	a	b	.	a	70	.	g	a	c	.
3	.	a	b	.	a	37	c	.	a	e	.	71	a	h	b	a	.
4	.	.	a	.	c	38	a	.	b	a	.	72	c	a	b	.	a
5	a	.	b	a	.	39	f	a	b	.	a	73	f	.	a	d	.
6	.	a	b	.	a	40	.	e	a	d	.	74	a	.	b	a	c
7	.	.	a	c	.	41	a	c	b	a	.	75	.	a	b	.	a
8	a	.	b	a	.	42	.	a	b	c	a	76	.	c	a	e	.
9	c	a	b	.	a	43	.	.	a	c	.	77	a	.	b	a	c
10	.	.	b	.	.	44	a	.	b	a	.	78	d	a	b	.	a
11	a	.	b	a	c	45	d	a	b	.	a	79	c	e	a	.	f
12	d	a	b	.	a	46	.	.	a	.	c	80	a	d	b	a	.
13	.	c	a	.	.	47	a	d	b	a	.	81	.	a	b	c	a
14	a	d	b	a	.	48	e	a	b	.	a	82	.	.	a	.	.
15	.	a	b	.	a	49	.	f	a	c	.	83	a	c	b	a	.
16	c	.	a	.	e	50	a	.	b	a	.	84	i	a	b	c	a
17	a	.	b	a	.	51	c	a	b	d	a	85	h	.	a	.	.
18	.	a	b	d	a	52	.	.	a	f	h	86	a	.	b	a	d
19	.	.	a	.	.	53	a	e	b	a	c	87	e	a	b	.	a
20	a	c	b	a	d	54	.	a	b	.	a	88	.	.	a	.	c
21	.	a	b	c	a	55	g	c	a	.	e	89	a	g	b	a	i
22	e	.	a	.	.	56	a	.	b	a	.	90	f	a	b	.	a
23	a	.	b	a	.	57	.	a	b	.	a	91	.	d	a	c	.
24	.	a	b	e	a	58	c	d	a	.	g	92	a	.	b	a	.
25	.	d	a	.	c	59	a	.	b	a	.	93	c	a	b	.	a
26	a	.	b	a	.	60	.	a	b	.	a	94	.	h	a	.	e
27	.	a	b	.	a	61	e	.	a	.	.	95	a	.	b	a	c
28	.	.	a	c	f	62	a	c	b	a	f	96	k	a	b	.	a
29	a	.	b	a	e	63	.	a	b	c	a	97	.	c	a	.	d
30	c	a	b	.	a	64	.	.	a	.	d	98	a	.	b	a	h
31	.	.	a	.	d	65	a	.	b	a	.	99	.	a	b	.	a
32	a	f	b	a	c	66	.	a	b	h	a						
33	.	a	b	.	a	67	d	.	a	.	c						

Enfin le nombre 2 & tous les nombres qui ne seront marqués que d'un point étant mis de suite & par ordre dans une Table, on aura tous les nombres primitifs jusqu'au nombre donné 1000.

Cette Table suffira pour trouver tous les diviseurs de tous les nombres jusqu'à 1000000 carré de 1000.

TABLE DES NOMBRES PRIMITIFS
depuis 0 jusqu'à 1000.

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	923
13	83	173	269	373	467	593	691	821	929
17	89	179	271	379	479	599	701	823	937
19	97	181	277	383	487	601	709	827	941
23	101	191	281	389	491	607	719	829	947
29	103	193	283	397	499	613	727	839	953
31	107	197	293	401	503	617	733	853	967
37	109	199	307	409	509	619	739	857	971
41	113	211	311	419	521	631	743	859	977
43	127	223	313	421	523	641	751	863	983
47	131	227	317	431	541	643	757	877	991
53	137	229	331	433	547	647	761	881	997

On trouvera donc 170 nombres primitifs entre 0 & 1000.

La construction de cette Table sera la seule démonstration de cette opération.

91 Une quantité quelconque est égale au produit de tous ses diviseurs primitifs; par exemple $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

Car $ab = a \times b$, $ab^2 = a \times b \times b$, $a^2b^2 = a \times a \times a \times b \times b$; $3a^2b = 3 \times a \times a \times b$; $6a^2b^2 = 2 \times 3 \times a \times a \times b \times b$.

Mais ces diviseurs primitifs d'une quantité quelconque ne sont pas les seuls diviseurs de cette quantité : les produits de chacun de ces diviseurs par chacun des autres & par leurs produits sous toutes les combinaisons possibles seront encore aliquotes ou diviseurs de la quantité

proposée. Car 1, *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, *abcd* seront tous diviseurs de la quantité *abcd*.

92 *Pour trouver tous les diviseurs d'une quantité numérique ou algébrique proposée.*

On la divisera successivement par chacun de ses diviseurs primitifs, en prenant le quotient de chacune de ces divisions pour le dividende de la division suivante, & posant à part chacun de ces diviseurs primitifs, on multipliera successivement chacun d'eux par chacun de ceux qui le précedent, & par leurs produits.

Par exemple, soit proposé d'une part le nombre 30030, & de l'autre la grandeur algébrique *abcdfg*.

Pour plus de briéveté, nous supposerons ces deux quantités égales, & chacun de leurs diviseurs primitifs égaux de part & d'autre.

30030	1	1	*abcdfg*
15015	2	*a*	*bcdfg*
5005	3	*b*	*cdfg*
1001	5	*c*	*dfg*
143	7	*d*	*fg*
13	11	*f*	*g*
1	13	*g*	1

Posant d'abord l'unité vis-à-vis le dividende ou la quantité proposée 30030 = *abcdfg*, le quotient de cette quantité par l'unité sera la quantité elle-même.

On examinera ensuite quel est le diviseur primitif le plus simple : ainsi remarquant que le nombre 30030 est pair, & par conséquent divisible par 2, on le divisera par 2 que l'on suposera égal à quelque diviseur primitif algébrique comme *a*, & divisant ces deux quantités 30030, *abcdfg* par 2 = *a*, on aura pour quotient 15015 = *bcdfg* que l'on écrira vis-à-vis les diviseurs primitifs 2, *a*, par lesquels on les a divisées.

Les quotiens 15015, *bcdfg* ne pouvant plus être divisés par 2, *a*, on les divisera par 3 & *b*; & les nouveaux quotiens 5005, *cdfg* écrits vis-à-vis leurs diviseurs 3 & *b* serviront de dividendes pour l'opération suivante, & ainsi de suite en divisant toujours les nombres par la suite des nombres primitifs, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, & les quantités algébriques par la suite de leurs produisans ou diviseurs primitifs *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, &c.

Ensuite posant dabord l'unité, on la multipliera par le premier diviseur primitif de chaque quantité, & ces diviseurs ou leurs produits par l'unité seront posés au dessous. Multipliant ensuite l'unité & le premier diviseur primitif par le second, on aura deux termes dans chacune des deux quantités, on multipliera l'unité, chacun des deux premiers diviseurs, & leur produit par le troisiéme diviseur, & les quatre termes qui viendront de cette multiplication seront écrits audessous des précedens, & continuant ainsi à multiplier chaçun des diviseurs suivans par chacun des précedens & leurs produits, on aura tous les diviseurs de la quantité numérique ou algébrique proposée.

Ainsi tous les diviseurs de 30030 & de *abcdfg* sont

1	1	11	*f*	13	*g*	143	*fg*
2	*a*	22	*af*	26	*ag*	286	*afg*
3	*b*	33	*bf*	39	*bg*	429	*bfg*
6	*ab*	66	*abf*	78	*abg*	858	*abfg*
5	*c*	55	*cf*	65	*cg*	715	*cfg*
10	*ac*	110	*acf*	130	*acg*	1430	*acfg*
15	*bc*	165	*bcf*	195	*bcg*	2145	*bcfg*
30	*abc*	330	*abcf*	390	*abcg*	4290	*abcfg*
7	*d*	77	*df*	91	*dg*	1001	*dfg*
14	*ad*	154	*adf*	182	*adg*	2002	*adfg*
21	*bd*	231	*bdf*	273	*bdg*	3003	*bdfg*
42	*abd*	462	*abdf*	546	*abdg*	6006	*abdfg*
35	*cd*	385	*cdf*	455	*cdg*	5005	*cdfg*
70	*acd*	770	*acdf*	910	*acdg*	10010	*acdfg*
105	*bcd*	1155	*bcdf*	1365	*bcdg*	15015	*bcdfg*
210	*abcd*	2310	*abcdf*	2730	*abcdg*	30030	*abcdfg*

Démonstration.

1°. Tout produit d'un diviseur primitif d'une quantité par un ou plusieurs autres diviseurs primitifs de la même quantité, est nécessairement diviseur de cette quantité : car chacun de ces produits n'est composé que des diviseurs de la quantité proposée, & par conséquent tout produit de ces diviseurs primitifs qui ne surpassera pas cette quantité, la divisera exactement. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. Les produits trouvés par l'opération sont les seuls diviseurs possibles de la quantité proposée : car chacun des diviseurs primitifs a été multiplié par tous les autres & par leurs produits ; par conséquent

toute autre grandeur qui n'eſt pas compriſe dans la liſte des diviſeurs trouvés, comme *mn*, ou *nq*, a^3b^2, b^2c^m, &c. ſera neceſſairemnt compoſée de quelque diviſeur primitif *m*, *n*, *q*, &c. différent de ceux qui forment la grandeur *abcdfg* propoſée, ou de quelque puiſſance a^3, b^2, c^m, &c. des diviſeurs primitifs *a*, *b*, *c*, &c. de *abcdfg*, qui ne diviſe pas ce même produit *abcdfg* : donc toute autre grandeur né diviſera pas la quantité propoſée. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

93 *Si ſans vouloir ſe donner la peine de chercher tous ces diviſeurs, on ſe contentoit d'en ſçavoir le nombre.* Dans ce cas après avoir trouvé tous les diviſeurs primitifs, on poſera à part le nombre 2 pour chacun de ces diviſeurs primitifs inégaux, & lorſqu'il s'en trouvera pluſieurs égaux, on ajoutera l'unité à leur nombre, & multipliant ces nombres l'un par l'autre, leur produit ſera le nombre des diviſeurs de la quantité propoſée.

Par exemple ſi l'on demande le nombre des diviſeurs de la quantité numérique 10500, ou de la grandeur algébrique a^2bc^3d, on opérera comme ci-devant pour trouver tous leurs diviſeurs primitifs.

10500	1	1	1	a^2bc^3d
5250	2	3	*a*	abc^3d
2625	2		*a*	bc^3d
875	3	2	*b*	c^3d
175	5		*c*	c^2d
35	5	4	*c*	*cd*
7	5		*c*	*d*
1	7	2	*d*	1

Comme on peut diviſer 10500 par 2 & 5250 par 2, pour ces deux diviſeurs égaux, on poſera le nombre $3 = 2 + 1$; 2625 étant diviſé par 3, donne 875 qu'on ne peut plus diviſer par 3, pour ce diviſeur inégal, on poſera le nombre 2 ; le quotient 875 diviſé par 5 donnera 175 qui diviſé par 5 donne encore un quotient 35 qu'on peut encore diviſer par 5, ainſi 5 ſe trouve trois fois diviſeur primitif, on poſera donc le nombre $4 = 3 + 1$; enfin, comme le quotient 7 ne peut être diviſé que par 7, le dernier nombre qu'on mettra à part ſera le nombre 2, & le produit $3 \times 2 \times 4 \times 2 = 48$ ſera le nombre des diviſeurs de la quantité propoſée 10500.

Il eſt aiſé de voir que la même regle aura lieu pour la grandeur a^2bc^3d.

Par exemple, on trouvera en ſuivant ce principe que la quantité 30300 ou *abcdfg*, aura 64 diviſeurs ou $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

DEMONSTRATION.

1°. Le premier diviſeur primitif multiplié par l'unité ne donnera qu'un diviſeur, le ſecond multiplié par l'unité & par le premier en donnera deux, le troiſiéme multiplié par l'unité par le premier par le ſecond & par le produit des deux premiers en donnera quatre & ainſi de ſuite, c'eſt-à-dire que le produit de chaque nouveau diviſeur primitif, par les termes trouvés donnera autant de termes qu'on en a déja, & doublera par conſéquent le nombre de ces termes. Donc pour chaque diviſeur primitif inégal, ou doublera le nombre des diviſeurs déja trouvés. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. Mais lors qu'un diviſeur primitif ſera répeté, comme en le multipliant par les termes déja trouvés, on n'aura de nouveaux produits qu'à commencer au produit de l'unité par le diviſeur primitif qui précede immédiatement & qui eſt égal à celui par lequel on opere, on n'aura donc que la moitié du nombre des diviſeurs qu'on auroit eu en multipliant par un diviſeur primitif inégal. Donc on poſera le nombre 3 dans la ſuite des grandeurs dont le produit doit indiquer le nombre des diviſeurs demandé lorſque l'on aura deux diviſeurs primitifs égaux ; on y fera entrer le nombre 4 quand on aura trois diviſeurs primitifs égaux ; enfin quand le même diviſeur primitif ſe trouvera n fois, on y fera entrer $n+1$. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

94 Lorſque pluſieurs quantités ne ſeront pas primitives entre elles, comme 48, 120, 168, ou $6a^4b$, $2a^3b^2$, $4a^2b^3$, on pourra les diviſer ſans reſte par une même quantité, comme 2, 3, 4, ou 2, b, a^2. & ce diviſeur exact ſera nommé *diviſeur commun* de ces grandeurs.

Ainſi les nombres 2, 3, 4, par leſquels on peut diviſer 48, 120, 168, ſont les diviſeurs communs de ces nombres : de même les quantités 2, a^2b, ſont les diviſeurs communs de $6a^4b$. $2a^3b^2$. $4a^2b^3$. Car en diviſant les nombres 48, 120, 168, par 2, on aura les quotiens exacts 24, 60, 84, qu'on pourra diviſer par 3, ce qui donnera les nombres entiers 8, 20, 28, enfin comme ces nombres ne ſont pas encore primitifs entre eux, & qu'ils peuvent être diviſés par 4, cette derniere diviſion donnera les quotiens exacts 2, 5, 7, qui n'ont plus de diviſeur commun & qui ſont primitifs.

De même $\frac{6a^4b}{2} = 3a^4b$, $\frac{2a^3b^2}{2} = a^3b^2$, $\frac{4a^2b^3}{2} = 2a^2b^3$;

$\frac{3a^4b}{a^2} = 3a^2b$, $\frac{a^3b^2}{a^2} = ab^2$, $\frac{2a^2b^3}{a^2} = 2b$. Enfin continuant la di-

viſion

vision par b, on aura $\frac{3a^2b}{b} = 3a^2$, $\frac{ab^2}{b} = ab$, $\frac{2b^3}{b} = 2b^2$, & les quotiens $3a^2$, ab, $2b^2$, n'aïant plus de diviseur commun sont primitifs entre eux.

95 Si en divisant deux ou plusieurs quantités par un diviseur commun, les quotiens sont primitifs entre eux, alors ce diviseur s'appelle le *plus grand commun diviseur* de ces quantités.

Par exemple si nous divisons les nombres 48, 120, 168 par 24, comme les quotiens 2, 5, 7, n'ont plus de diviseur commun, le nombre 24 sera leur plus grand commun diviseur.

Par la même raison $2a^2b$ sera le plus grand commun diviseur des quantités algébriques $6a^4b$, $2a^3b^2$, $4a^2b^3$; car en divisant ces quantités par $2a^2b$, les quotiens $3a^2$, ab, $2b^2$ sont primitifs entre eux.

96 *Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs quantités numériques ou algébriques proposées.*

On cherchera tous leurs diviseurs primitifs communs, & le produit de ces diviseurs sera le plus grand commun diviseur demandé.

Par exemple si l'on demande le plus grand commun diviseur des trois nombres 840, 2100, 2940.

Comme ces nombres sont tous pairs on les divisera par 2, ce qui donnera 420, 1050, 1470, qui peuvent encore être divisés par 2, & dont les quotiens seront 210, 525, 735, qu'on divisera par 3; les quotiens 70, 175, 245, seront divisés par 5, & les résultats 14, 35, 49, aïant encore un diviseur commun 7 par lequel on les divisera, donneront pour quantités primitives entre elles les nombres 2, 5, 7, & le produit $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ sera le plus grand commun diviseur demandé.

On peut souvent abréger beaucoup cette opération, par exemple reconnoissant que les nombres proposés sont tous multiples de 10, on auroit pû trancher dabord la derniere figure de chacun & regarder cette division comme faite par le diviseur $2 \times 5 = 10$, & les résultats 84, 210, 294, étant ensuite successivement divisés par 2, par 3, & par 7, auroient donné les mêmes nombres 2, 5, 7, qu'on a trouvés.

Si l'on demande le plus grand commun diviseur des deux polinomes algébriques.

$$\left.\begin{matrix} 12acm + 24bcm - 4adm - 8bdm \\ +3acn + 6bcn - adn - 2bdn \end{matrix}\right\} \& \left\{\begin{matrix} 3acx + 6bcx - adx - 2bdx \\ -3acy - 6bcy + ady + 2bdy. \end{matrix}\right.$$

En examinant ces polinomes, on reconnoîtra aisément qu'ils peuvent se diviser tous deux exactement par une même quantité $a+2b$; & les divisant tous deux par ce diviseur commun $a+2b$.

Le premier donnera	Et le second
$12cm-4dm+3cn-dn$,	$3cx-dx-3cy+dy$

Et comme ces quotiens contiennent encore des lettres semblables; on examinera s'il n'ont pas encore quelque diviseur commun, & trouvant qu'ils peuvent encore être tous deux exactement divisés par une même quantité $3c-d$, on les divisera tous deux par $3c-d$.

Le quotient du premier sera	Et celui du second
$4m+n$	$x-y$

Et le produit de ces deux diviseurs communs, c'est-à-dire, $3ac-ad+6bc-2bd=(a+2b)\times(3c-d)$, sera le plus grand commun diviseur des deux quantités algébriques proposées.

Démonstration.

Le résultat de cette opération est nécessairement le plus grand commun diviseur des quantités proposées.

Car en divisant par le produit de tous les diviseurs primitifs communs, les quotiens résultans sont les mêmes qu'on auroit eu en divisant successivement par chacun de ces diviseurs primitifs communs, & ces quantités devenues primitives entre elles par l'opération ne peuvent plus avoir de diviseur commun (89); par conséquent le diviseur qui les rend primitives entre elles est le plus grand commun diviseur possible de ces quantités. *Ce qu'il falloit démontrer.*

97 *On donne ordinairement une autre méthode de trouver le plus grand diviseur commun de deux ou plusieurs quantités.*

On commence d'abord à chercher le plus grand commun diviseur de deux des quantités proposées, ensuite on cherche le plus grand commun diviseur de ce premier diviseur trouvé, & de la troisiéme, puis comparant le plus grand commun diviseur trouvé des trois premieres quantités avec la quatriéme on cherche encore leur plus grand commun diviseur, en sorte qu'on n'opere jamais que sur deux quantités à la fois, & le dernier diviseur trouvé est le plus grand commun diviseur de toutes les quantités proposées.

On trouvera le plus grand commun diviseur de deux quantités en divisant la plus grande par la plus petite, & si la division se fait exac-

tement la plus petite de ces deux quantités sera leur plus grand commun diviseur.

Si la division ne fait pas exactement, on divisera la plus petite de ces deux quantités par le reste de la premiere division, & si cette seconde opération donne un quotient exact, le reste de la premiere sera le plus grand commun diviseur demandé.

Enfin continuant à prendre le diviseur & le reste de l'opération précedente pour le dividende & le diviseur actuels, on divisera toujours ainsi la plus grande de ces deux quantités par la plus petite, jusqu'à ce qu'on ait un quotient exact, & alors le diviseur qui aura donné ce quotient, sera le plus grand commun diviseur demandé.

Mais comme l'opération expliquée ci-devant (96) est plus générale & n'exige presque jamais que des divisions simples, nous la croïons préférable à la derniere, comme plus expeditive.

98 Toute grandeur composée est *le multiple commun* de toutes ses aliquotes, c'est-à-dire de toutes les qnantités qui peuvent la diviser exactement.

Par exemple 144 est multiple commun de 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, parce que 144 peut se diviser exactement par chacun de ces nombres.

De même $5abc$ est le multiple comme des quantités 5, a, $5a$, b, $5b$, ab, $5ab$, c, $5c$, ac, $5ac$, bc, $5bc$, abc; car on peut diviser exactement $5abc$ par chacune de ces quantités.

99 Deux ou plusieurs grandeurs peuvent avoir une infinité de multiples communs, & comme on peut toujours multiplier les grandeurs, il est évident que le plus grand multiple commun de deux ou plusieurs grandeurs, est infini; mais au contraire le plus petit multiple commun de deux ou plusieurs quantités, est nécessairement une grandeur unique & finie.

Quelquefois on a besoin de connoître le plus petit multiple de deux ou plusieurs quantités; pour y réussir, on peut s'y prendre de différentes manieres: mais pour découvrir la plus simple, & en même tems donner un exemple de l'utilité de l'Algébre, nous allons chercher par le moïen de ce calcul, ce qui compose ce plus petit multiple commun.

Supposons pour cela qu'on demande le plus petit multiple commun des trois quantités $abcd$, b^3c^2, c^2df, on voit que le plus petit commun multiple de ces quantités doit être composé de tous leurs diviseurs primitifs a, b, c, d, f; mais b ne sera pas multiple de $b^3 = b \times b \times b$: de même c ne contiendra pas $c^2 = c \times c$; ainsi au lieu de b & de c,

on mettra b^3 & c^2 dans la suite des divisEurs primitifs de ces quantités, qui deviendra a, b^3, c^2, d, f, & le produit ab^3c^2df de tous ces diviseurs primitifs, sera le plus petit multiple commun des quantités $abcd$, b^3c^2, c^2df.

100 *Par conséquent pour trouver le plus petit multiple commun de deux ou plusieurs quantités, on commencera par chercher tous les diviseurs primitifs de chacune, on multipliera les uns par les autres tous les diviseurs primitifs inégaux, & lorsqu'il s'en trouvera plusieurs égaux dans quelqu'une des quantités proposées, on les fera entrer dans le produit autant de fois qu'ils sont produisans dans la quantité qui les contient davantage : le résultat de cette opération sera le plus petit multiple commun demandé.*

Par exemple, si l'on demande le plus petit multiple commun des quantités 210, 675, 1925, on divisera chacune d'elles en particulier par la suite des nombres primitifs 2, 3, 5, 7, 11, &c.

Soient les nombres proposés	210	675	1925
divisant par	2	3	5
on aura	105	225	385
divisant par	3	3	5
on aura	35	75	77
continuant à diviser par	5	3	7
on aura	7	25	11
qu'on divisera par	7	5	11
ce qui donnera	1	5	1
enfin divisant par		5	
on aura		1	

On voit que le premier $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$, & que tous ses diviseurs primitifs sont inégaux.

Le second $675 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$ est composé de deux diviseurs inégaux dont le premier 3 est trois fois produisant, & le second 5 deux fois.

Enfin, le troisiéme $1925 = 5 \times 5 \times 7 \times 11$, est produit par trois diviseurs primitifs inégaux dont le premier seulement est deux fois produisant.

Le premier diviseur 2 n'étant point répété ne sera qu'une fois produisant, le second diviseur primitif 3 sera pris trois fois parce qu'il est trois fois diviseur dans 675 : le troisiéme 5 étant deux fois diviseur dans 675 & dans 1925, sera pris deux fois, & les deux derniers diviseurs 7 & 11 qui ne sont point répétés, ne seront pris qu'une fois chacun.

On aura donc $2\times3\times3\times3\times5\times5\times7\times11=2\times27\times25\times7\times11=103950$ pour le plus petit commun multiple des nombres 210, 675, 1925.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer la justesse de cette opération, il suffira de faire voir que toute autre quantité plus petite ne sera pas multiple commun des grandeurs proposées, & que toute autre quantité qui en sera multiple, sera plus grande que celle qu'on a trouvée par l'opération.

1°. Toute quantité telle que $\frac{ab^3c^2df}{n}$, plus petite que le commun multiple ab^3c^2df, ne sera pas multiple commun des quantités proposées, puisqu'aucun des diviseurs primitifs dont elles sont composées, n'est divisé par aucune grandeur n: & toute quantité b^3c^2df, dans laquelle un diviseur quelconque a ne sera pas produisant, ne contiendra pas celle des grandeurs proposées dans laquelle a est compris: donc toute quantité plus petite que ab^3c^2df ne sera pas multiple commun des grandeurs $abcd$, b^3c^2, c^2df. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. Au contraire nab^3c^2df, ou $a^2b^3c^2df$, c'est-à-dire, la grandeur ab^3c^2df multipliée par quelque grandeur n, ou par un des diviseurs primitifs a, sera multiple des grandeurs proposées $abcd$, b^3c^2, c^2df; mais elle sera n fois ou a fois aussi grande que le multiple commun ab^3c^2df, & par conséquent ne sera pas le plus petit multiple demandé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Donc le commun multiple trouvé par l'opération sera le plus petit multiple possible commun aux quantités proposées. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Relativement à la méthode dont il est parlé ci-dessus (97) pour trouver le plus grand diviseur commun de plusieurs quantités, on donne aussi la maniere suivante de découvrir le plus petit multiple commun de deux quantités: & lorsqu'on a trouvé ce plus petit multiple commun par rapport aux deux quantités premieres prises, on cherche le plus petit multiple commun de ce premier résultat & de la troisiéme quantité proposée, & on continue jusqu'à ce qu'on ait operé ainsi sur toutes les quantités proposées. Par ce moïen on n'a jamais que deux quantités à considérer.

Pour trouver le plus petit multiple commun de deux quantités suivant cette méthode, on cherche d'abord leur plus grand commun diviseur (97), ensuite on divise l'une des deux quantités proposées par ce plus grand commun diviseur, & multipliant l'autre par le quo-

tient, le produit qui en résulte est le plus petit multiple commun qu'on a demandé.

101 *Soit qu'on multiplie ou qu'on divise une quantité quelconque par l'unité, le produit ou le quotient qui en résultera, ne differera pas de la quantité ainsi multipliée ou divisée.*

DÉMONSTRATION.

Toute quantité se contient elle-même une fois. Donc $a \times 1 = a$. Réciproquement toute quantité est contenue une fois en elle-même. Donc $\frac{a}{1} = a$. Donc $a \times 1 = \frac{a}{1} = a$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

102 *On ne changera point la valeur d'une quantité quelconque en la multipliant & divisant en même tems par une même quantité.*

DÉMONSTRATION.

Si aïant multiplié une quantité a par une autre quantité n, on divise le produit an par n, on aura $\frac{an}{n} = a$ (74). D'ailleurs $\frac{an}{n} = a \times \frac{n}{n}$; mais $\frac{n}{n} = \frac{1}{1} = 1$ (86), par conséquent en multipliant & divisant par une même quantité, on ne fait autre chose que multiplier par une fraction, dont les deux termes sont égaux, c'est-à-dire, qu'on multiplie & divise en même tems par l'unité. Donc on ne change point la quantité (101). *Ce qu'il falloit démontrer.*

103 *On ne changera point la valeur d'une fraction en multipliant ses deux termes par une même quantité.*

DÉMONSTRATION.

$\frac{a}{b} \times \frac{n}{n} = \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$; car en multipliant par une même quantité les deux termes de la fraction, on la multiplie par l'unité. Donc on n'en change point la valeur (101). *Ce qu'il falloit démontrer.*

104 *On ne changera point la valeur d'une fraction en divisant ses deux termes par une même quantité.*

DÉMONSTRATION.

$$\frac{\left(\frac{an}{n}\right)}{\left(\frac{bn}{n}\right)} = \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$$; car en divisant les deux termes d'une fraction par une même quantité, on ne fait autre chose que diviser la fraction par l'unité. Donc on n'en change point la valeur (101). *Ce qu'il falloit démontrer.*

105 Lorsque les deux termes d'une fraction sont primitifs entre eux (89), on dit que cette *fraction est réduite à ses plus simples termes possibles*; car alors le numérateur & le dénominateur n'aïant aucun diviseur commun, ne pourront point être tous deux divisés par une même quantité, & par conséquent on ne pourra pas diviser l'un de ses termes ou tous les deux par quelque quantité que ce soit, sans changer la valeur de la fraction. Ainsi les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{m}{q}$, sont réduites à leurs moindres termes possibles: au contraire les fractions $\frac{3}{9}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{21}{33}$, $\frac{ab}{bc}$, $\frac{mn}{nq}$, ne sont pas réduites à leurs plus simples termes; puisque l'on peut diviser par une même quantité les deux termes de chacune en particulier (102); on aura $\frac{3}{9} = \frac{1\times3}{3\times3}$, $\frac{8}{10} = \frac{4\times2}{5\times2}$, $\frac{21}{33} = \frac{7\times3}{11\times3}$, $\frac{ab}{bc} = \frac{a\times b}{c\times b}$, $\frac{mn}{nq} = \frac{m\times n}{q\times n}$; & divisant chacune d'elles par les diviseurs communs aux deux termes, elles deviendront $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{m}{q}$, qui ne peuvent plus se réduire.

106 *Pour réduire une fraction à ses moindres termes possibles, on divisera ses deux termes par leur plus grand commun diviseur (96), le résultat sera la fraction réduite:* par exemple, $\frac{36}{84} = \frac{12\times3}{12\times7} = \frac{3}{7}$ (104); par la même raison $\frac{abd}{bdn} = \frac{a\times b\times d}{n\times b\times d} = \frac{a}{n}$.

107 Lorsque le numérateur d'une fraction sera multiple de son dénominateur, comme la division indiquée sera possible, on pourra la réduire en entiers en divisant le numérateur par son dénominateur; ainsi $\frac{21}{7}=3$, car $\frac{21}{7}=\frac{3\times7}{1\times7}=\frac{3}{1}$ (104) $=3$. $\frac{mn}{n}=\frac{m\times n}{1\times n}=\frac{m}{1}$ (74) $=m$.

108 Lorsque la fraction étant excédente, le numérateur n'est pas multiple du dénominateur; la fraction pourra être réduite en grandeur mixte: ainsi $\frac{23}{10}=\frac{20}{10}+\frac{3}{10}=2+\frac{3}{10}$; $\frac{ab+c}{a}=b+\frac{c}{a}$.

109 Mais lorsqu'on voudra comparer une fraction défaillante avec une quantité entiere, comme on ne pourra pas réduire en entiers une telle fraction, & que l'on peut ne pas appercevoir distinctement le rapport qui se trouve entre ces deux quantités, il est souvent commode & utile de réduire l'entier en une fraction dont le dénominateur soit le même que celui de la fraction proposée: pour cela il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction, & le divisant par la même quantité, on n'en changera pas la valeur (102): par exemple, si l'on a l'entier 3, & la fraction $\frac{4}{5}$, en multipliant & divisant 3 par 5, on aura $3=\frac{15}{5}$; de même si l'on veut comparer la grandeur entiere m avec la fraction $\frac{n}{q}$, on aura $m=\frac{mq}{q}$ (102).

110 La même chose arrivera sur les quantités composées d'entiers & de fractions; car pour réduire ces grandeurs mixtes en fractions, on multipliera l'entier par le dénominateur de la fraction; & on fera du tout une seule fraction qui aura pour dénominateur le dénominateur de la partie fractionnaire de la grandeur mixte proposée: ainsi $3\frac{7}{11}=\frac{3\times11+7}{11}=\frac{33}{11}+\frac{7}{11}=\frac{40}{11}$; $m+\frac{n}{q}=\frac{mq}{q}+\frac{n}{q}=\frac{mq+n}{q}$.

111 Enfin, si l'on demande une partie fractionnaire quelconque d'une quantité entiere fractionnaire ou mixte, on commencera par réduire en fraction, ou regarder comme telle, la grandeur entiere ou mixte proposée, on multipliera ces deux fractions l'une par l'autre; c'est-à-dire, numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur, & la fraction qui en résultera sera la quantité demandée.

Par

Par exemple, si l'on demande les deux tiers de 4, on aura $4 = \frac{4}{1}$, & $\frac{4}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

Si l'on demande les $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$, on aura pour résultat $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} - \frac{15}{28}$.

Si l'on demande les $\frac{7}{11}$ de $4\frac{1}{2}$ comme $4\frac{1}{2} = \frac{9}{}$, on aura $\frac{9}{2} \times \frac{7}{11} = \frac{63}{22}$.

Il en sera de même des grandeurs algébriques.

Si l'on demande une partie $\frac{m}{n}$ de la grandeur a, on aura $\frac{a}{1} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$.

La même partie $\frac{m}{n}$ de la fraction $\frac{a}{c}$ sera $\frac{am}{cn}$.

Enfin, cette même partie $\frac{m}{n}$ de la quantité mixte $a + \frac{b}{c}$ sera $\left(\frac{ac+b}{c}\right) \times \frac{m}{n} = \frac{acm+bm}{cn}$.

On voit de reste par ces exemples, que la fraction d'une fraction ou la fraction d'un mixte qu'on aura (pour la commodité du calcul) réduit en fraction, sera une fraction composée du produit des deux numérateurs, divisé par le produit des deux dénominateurs des deux fractions proposées : & que pour avoir une partie fractionnaire quelconque d'un entier, il suffira de multiplier l'entier par le numérateur de la fraction proposée sans changer son dénominateur : parce qu'un entier supposé réduit en fraction n'étant divisé que par l'unité, le denominateur proposé multiplié par l'unité ne changera point de valeur.

112 Lorsque l'on compare ensemble deux fractions différemment divisées, si l'on veut en connoître la somme ou la différence, il faut les réduire à un même diviseur : car alors ces fractions seront entre elles comme leurs numérateurs (87) : par exemple, on n'apperçoit pas aisément le rapport de $\frac{4}{5}$ à $\frac{9}{11}$; tant que ces fractions restent sous cette forme ; mais si pour un moment on suppose que $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 11}{5 \times 11} = \frac{44}{55}$, & que $\frac{9}{11} = \frac{9 \times 5}{11 \times 5} = \frac{45}{55}$, on voit alors que la seconde $\frac{6}{11}$ est plus grande que la premiere $\frac{4}{5}$ de la quantité $\frac{1}{55}$.

113 *Pour réduire deux fractions à la même dénomination, on multipliera les deux termes de la premiere fraction par le dénominateur de la seconde, & les deux termes de la seconde par le dénominateur de la premiere.*

Ainsi pour réduire les fractions $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{11}$ à la même dénomination, on

multipliera 4 & 5 par 11, ce qui donnera $\frac{4\times 11}{5\times 11} = \frac{44}{55}$ pour la premiere $\frac{4}{5}$; & multipliant aussi 9 & 11 par 5 on aura $\frac{5\times 9}{5\times 11} = \frac{45}{55}$ pour la seconde fraction $\frac{9}{11}$.

On réduira de même les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, & on aura $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$; $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$, qui ont mêmes valeurs que $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, & qui sont réduites à la même dénomination.

DÉMONSTRATION.

Les fractions $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, sont de mêmes valeurs que les fractions proposées $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

Car si l'on divise les deux termes de la premiere par d, (104) on aura $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$: de même on aura aussi pour la seconde $\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$.

Ce qu'il falloit démontrer.

114 En général *pour réduire plusieurs fractions à la même dénomination sans changer leurs valeurs.*

1°. On multipliera le numérateur de chaque fraction, par le produit des dénominateurs de toutes les autres fractions, & ce numérateur ainsi transformé, sera le numérateur de la nouvelle fraction de même valeur que celle à la place de laquelle on la substituë.

2°. On multipliera tous les dénominateurs les uns par les autres, & le produit de tous ces dénominateurs, sera le dénominateur commun de toutes les fractions proposées, réduites.

Ainsi les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, réduites à la même dénomination, seront $\frac{adnq}{bdnq}$, $\frac{bcnq}{bdnq}$, $\frac{bdmq}{bdnq}$, $\frac{bdnp}{bdnq}$.

Les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}$, aussi réduites deviendront $\frac{616}{924}$, $\frac{693}{924}$, $\frac{660}{924}$, $\frac{672}{924}$.

Il arrive souvent qu'on ne peut réduire plusieurs fractions à la même dénomination que de cette maniere ; car toutes les fois que les dénominateurs proposés n'auront aucun diviseur commun, leur plus petit multiple commun sera leur produit lui même (99).

115 *Mais lorsque les dénominateurs des fractions proposées auront quelque diviseur commun*, on prendra le plus petit multiple commun de leurs dénominateurs pour le dénominateur commun des fractions réduites (99), & divisant ce nouveau dénominateur commun par le dénominateur particulier de chaque fraction, on multipliera son numérateur par le quotient.

Par exemple, si l'on propose de réduire à la même dénomination les fractions $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{16}$, on auroit en suivant la regle générale (114) pour dénominateur commun 9216 : mais en prenant 48 qui est le plus petit multiple commun des dénominateurs proposés 8, 6, 12, 16, pour dénominateur commun, on aura $\frac{7}{8}=\frac{42}{48}$, $\frac{5}{6}=\frac{40}{48}$, $\frac{11}{12}=\frac{44}{48}$, $\frac{13}{16}=\frac{39}{48}$.

Les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{10}$, réduites à la même dénomination suivant la regle générale (114), seroient $\frac{700}{1050}$, $\frac{630}{1050}$, $\frac{750}{1050}$, $\frac{735}{1050}$; mais en y appliquant ce que nous venons de voir, ces fractions seront réduites à $\frac{140}{210}$, $\frac{126}{210}$, $\frac{150}{210}$, $\frac{147}{210}$.

On réduira de même les fractions algébriques $\frac{a}{bc}$, $\frac{m}{cd}$, $\frac{n}{bd}$, $\frac{p}{bcd}$, aux fractions $\frac{ad}{bcd}$, $\frac{bm}{bcd}$, $\frac{cn}{bcd}$, $\frac{p}{bcd}$, qui sont en même dénomination, & dont le dénominateur est le plus simple qu'il soit possible.

On voit qu'en pareil cas, il suffit de multiplier les deux termes de chaque fraction par les diviseurs primitifs du plus petit multiple commun des dénominateurs, qui ne sont pas diviseurs du dénominateur actuel.

116 *Donc en général soit que les dénominateurs aïent ou n'aïent pas de diviseurs communs, des fractions proposées seront réduites aux plus simples termes possibles de même dénomination en prenant le plus petit multiple commun de leurs dénominateurs pour dénominateur commun, & multipliant chacun de leurs numérateurs par le quotient de ce commun dénominateur divisé par le dénominateur correspondant.*

DÉMONSTRATION.

On ne changè point la valeur de deux ou plusieurs fractions en les réduisant comme nous venons de faire (114. 115. 116.) à la même dénomination, & le dénominateur commun trouvé par l'opération est le plus petit qu'il soit possible de donner à ces fractions.

1. On ne change point la valeur de ces fractions, puisqu'on multiplie les deux termes de chacune par une même quantité (103). *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. Le dénominateur commun trouvé par l'opération est le plus petit commun dénominateur possible de ces fractions réduites : car ce dénominateur est le plus petit multiple des dénominateurs des fractions proposées (*hip*), & par conséquent (99) toute autre plus petite quantité n'en étant pas multiple, ne pourroit pas être le dénominateur commun, puisque ce dénominateur commun doit être divisible par chacun des dénominateurs proposés, c'est-à-dire, doit être multiple de ces dénominateurs. (114). *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Pour appliquer à des exemples quelques-uns des principes généraux que nous venons de voir, examinons les fractions numériques défaillantes, dont chaque terme est de la premiere suite (15), c'est-à-dire, n'a qu'un seul chiffre, & remarquons les changemens dont ces fractions sont susceptibles.

1°. Ces fractions réduites à leurs plus simples termes possibles composeront les 27 fractions comprises dans la premiere colomne de la table suivante, dont les termes sont primitifs entre eux.

2°. Ces mêmes fractions réduites à la même dénomination auront pour dénominateur commun le nombre 2520, qui est le plus petit multiple commun de leurs dénominateurs 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. & deviendront les fractions contenues dans la seconde colomne.

3°. Comme ces fractions vont en augmentant depuis $\frac{1}{9}$ jusqu'à $\frac{8}{9}$, la différence qui est entre chacune de ces fractions, & la suivante est celle qui se trouve vis-à-vis la plus petite ou la premiere des deux dans la troisiéme colomne aïant le même dénominateur commun que les fractions de la seconde.

4°. Enfin ces mêmes différences réduites à leurs plus simples termes forment les fractions unitaires ou aliquotes de l'unité qui remplissent la quatriéme colomne, & dont les dénominateurs sont des nombres de la seconde suite.

Par exemple, $\frac{1}{8} = \frac{1}{9} + \frac{1}{72} = \frac{280}{2520} + \frac{35}{2520} = \frac{315}{2520}$, &c.

Iere. col.	IIe. col.	IIIe. col.	IVe. col.
1/9	280/2520	35/2520	1/72
1/8	315/2520	45/2520	1/56
1/7	360/2520	60/2520	1/42
1/6	420/2520	84/2520	1/30
1/5	504/2520	56/2520	1/45
2/9	560/2520	70/2520	1/36
1/4	630/2520	90/2520	1/28
2/7	720/2520	120/2520	1/21
1/3	840/2520	105/2520	1/24
3/8	945/2520	63/2520	1/40
2/5	1008/2520	72/2520	9/35
3/7	1080/2520	40/2520	1/63
4/9	1120/2520	140/2520	1/18
1/2	1260/2520		

Iere. col.	IIe. col.	IIIe. col.	IVe. col.
bis 1/2	1260/2520	140/2520	1/18
5/9	1400/2520	40/2520	1/63
4/7	1440/2520	72/2520	1/63
3/5	1512/2520	63/2520	1/40
5/8	1575/2520	105/2520	1/24
2/3	1680/2520	120/2520	1/21
5/7	1800/2520	90/2520	1/28
3/4	1890/2520	70/2520	1/36
7/9	1960/2520	56/2520	1/45
4/5	2016/2520	84/2520	1/30
5/6	2100/2520	60/2520	1/42
6/7	2160/2520	45/2520	1/56
7/8	2205/2520	35/2520	1/72
8/9	2240/2520		

Nous n'avons point encore fait la distinction des différentes especes de fractions, parce que les opérations accessoires que nous avons expliquées conviennent également à toutes les fractions ; mais comme il faut admettre quelques différences dans les opérations principales entre les différentes sortes de fractions numériques relativement à l'espece de chacune, nous ferons l'application de ces opérations, 1°. sur les fractions géneriques, 2°. sur les fractions vulgaires, 3°. sur les fractions décimales.

117 Les fractions numériques & litterales qne nous avons considerées jusqu'à present, sont des grandeurs abstraites relatives à une unité indéterminée, & par conséquent applicables à toute espece quelconque de grandeurs. On les appelle *fractions génériques.*

118 On appelle *fractions vulgaires* celles au dénominateur desquelles l'usage a substitué un nom qui fixe leur rapport à l'unité concrete d'une espece déterminée : le sou, par exemple, est $\frac{1}{20}$ de la livre de monnoïe, le pied, $\frac{1}{6}$ de la toise ; le setier, $\frac{1}{12}$ du muids ; l'once, $\frac{1}{16}$ de la livre de pesanteur ; & la minute, $\frac{1}{60}$ de l'heure : &c.

119 Enfin pour applanir les difficultés des calculs numériques les plus considérables, on a imaginé de continuer la progression décimale des nombres au dessous de l'unité, en sorte que chaque chiffre qui suit les unités à droite est supposé divisé par l'unité suivie d'un, de deux, ou de trois zeros &c, selon que ce caractere est le premier, le second, ou le troisiéme après celui qui exprime les unités. Ces fractions qu'on nomme *fractions décimales* sont celles de toutes les fractions numériques, dont l'usage est le plus fréquent dans les Mathematiques.



CHAPITRE IV.

Opérations principales du premier dégré sur les Fractions.

I.

Des Fractions génériques.

120 SI l'on convient de nommer *génériques*, des grandeurs fractionnaires abstraites, aucunes sans doute ne meriteront mieux ce nom que les fractions algébriques, puisque les caracteres qui les expriment sont dépouillés de toute signification (42) : c'est pourquoi nous appliquerons en même tems les opérations principales des fractions génériques aux fractions algébriques & aux fractions numériques abstraites.

DE L'ADDITION.

121 Pour ajouter ensemble deux ou plusieurs fractions, ou des grandeurs entieres, fractionnaires & mixtes, comme on n'appercevra distinctement leurs raports que lorsque leurs dénominateurs seront égaux, parce qu'alors leurs unités seront de la même espece (87), on réduira toutes les quantités qu'on veut ajouter en autant de fractions de même dénomination (109, 110, 116), & la fraction qui en exprimera la somme aura pour numérateur la somme de tous les numérateurs divisée par le dénominateur commun.

Si ces grandeurs sont déja réduites en fractions divisées par un dénominateur commun, on se contentera d'ajouter tous leurs numérateurs, laissant le même dénominateur.

On observera d'ailleurs les principes donnés sur l'addition des nombres (18), & sur l'addition des quantités algébriques (65).

Ainſi en ajoutant les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, on aura $\frac{ad+bc}{bd}$.

Si l'on ajoute les quantités a, $\frac{b}{c}$, $\frac{m}{n}$, on aura $\frac{acn+bn+cm}{cn}$.

La ſomme de $a+\frac{b}{c}$, $-\frac{m}{n}$, $-\frac{p}{q}$, ſera $\frac{acnq+bnq-cmq-cnp}{cnq}$,

Ajoutant $4\frac{2}{3}$, 3, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, la ſomme ſera $=\frac{84+54+15+14}{18}$, $\frac{167}{18}=9\frac{5}{18}$,

DÉMONSTRATION.

La réduction d'une quantité quelconque en fraction (104), n'en change pas la valeur, non plus que la réduction de pluſieurs fractions à la même dénomination (116), & les fractions qui ont mêmes dénominateurs ſont entre elles comme leurs numérateurs (87) ; Donc pour les ajouter, il ſuffira de prendre la ſomme de leurs numérateurs, laiſſant ſubſiſter le même dénominateur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DE LA SOUSTRACTION.

221 Pour ſouſtraire une fraction d'une grandeur entiere, fractionnaire ou mixte, on réduira le ſouſtréande & le ſouſtracteur en fractions qui aïent le même dénominateur; on ſouſtraira à l'ordinaire (20 & 66), le numérateur ſouſtracteur du numérateur ſouſtréande, & l'excés de ce dernier ſur le précedent ſera le numérateur de la différence, à laquelle on donnera le dénominateur commun aux deux quantités qui ſont l'objet de la ſouſtraction.

Ainſi pour ſouſtraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, on aura $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$.

En ſouſtraïant $\frac{4}{5}$ de $\frac{11}{12}$, on aura $\frac{11}{12}-\frac{4}{5}=\frac{55}{60}-\frac{48}{60}=\frac{7}{60}$.

En ſouſtraïant $\frac{c}{d}$ de a, on aura $a-\frac{c}{d}=\frac{ad}{d}-\frac{c}{d}=\frac{ad-c}{d}$.

En ſouſtraïant $-\frac{a}{b}$ de m, on aura $m+\frac{a}{b}=\frac{mb+a}{b}$.

Si l'on retranche la fraction $\frac{a-b}{c}$ de la fraction $\frac{m+n}{s}$, on aura

$\frac{m+n}{s}-\frac{a+b}{c}=\frac{cm+cn-as+bs}{cs}$.

DÉMONSTRATION

DÉMONSTRATION.

Lorſque les fractions ſont réduites à la même dénomination, leurs unités ſont de même eſpece, par conſéquent on aura leur différence en prenant la différence de leurs numérateurs : car ces numérateurs indiquent le nombre d'unités fractionnaires dont chacune des quantités propoſées eſt compoſée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DE LA MULTIPLICATION.

Suppoſant les mixtes réduits en fractions, on peut avoir à multiplier 1°. un entier par une fraction, 2°. une fraction par un entier, 3°. une fraction par une fraction; mais comme il eſt indifférent de prendre l'un quelconque des deux produiſans pour multiplicande ou pour multiplicateur, le premier & le ſecond cas n'en feront qu'un ſeul.

PREMIER CAS.

123 Pour multiplier une fraction par un entier, on multipliera le numérateur par l'entier, & on diviſera ce produit par le dénominateur : c'eſt-à-dire qu'on lui donnera le dénominateur de la fraction.

Ainſi $\frac{b}{c} \times d = \frac{bd}{c}$, $\frac{a+b}{c} \times d = \frac{ad+bd}{c}$.

$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$, $\frac{5}{6} \times 2 = \frac{10}{6}$.

124 *Si le dénominateur de la fraction eſt multiple de l'entier propoſé, on diviſera ce dénominateur par l'entier, laiſſant ſubſiſter le numérateur tel qu'il eſt.*

Par exemple, $\frac{12}{25} \times 5 = \frac{12}{5}$, $\frac{7}{8} \times 4 = \frac{7}{2}$.

$$\frac{ac}{bm} \times m = \frac{ac}{b}, \quad \frac{ac+bc}{am-bm} \times m = \frac{ac+bc}{a-b}.$$

DÉMONSTRATION.

On voit par cette opération qu'une fraction multipliée par un entier m, deviendra m fois auſſi grande qu'elle étoit en multipliant ſon numérateur par m, & laiſſant ſubſiſter le même dénominateur; puiſque

par ce moïen, on prend m fois autant d'unités fractionnaires semblables à celles du multiplicande. Donc il suffira en pareil cas de multiplier le numérateur de la fraction par l'entier. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Mais nous avons vû (87) que des fractions qui ont mêmes numérateurs sont entre elles en raport renversé de leurs dénominateurs, par conséquent on multipliera une fraction par m en divisant son dénominateur par m, & laissant subsister le même nombre de parties, c'est-à-dire le même numérateur : car par cette opération on rend ces parties m fois aussi grandes qu'auparavant. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

SECOND CAS.

125 Pour multiplier une fraction par une fraction on multipliera chacun des deux termes du multiplicande par le terme correspondant du multiplicateur; & l'on divisera le produit des numérateurs par le produit des dénominateurs.

Supposons les quatre quantités quelconques p, s, t, q, qu'on appellera premier, second, troisiéme & quatriéme termes.

On aura donc $\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{pt}{sq}$.

$$\left(\frac{ab+ac}{m}\right) \times \frac{c}{n} = \frac{abc+ac^2}{mn};\ \left(\frac{a^2-b^2}{c}\right) \times \frac{a+b}{d} = \frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{cd}.$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9},\ \ \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}.$$

Cette façon de multiplier les fractions est toujours possible, car on peut toujours multiplier l'une par l'autre deux quantités quelconques.

126 Si l'une des fractions est telle que chacun de ses termes soit multiple de chacun des termes de l'autre pris dans un ordre renversé, on prendra cette fraction pour multiplicande, & renversant les termes de l'autre fraction, on divisera chacun des deux termes du multiplicande par le terme correspondant du multiplicateur ainsi renversé.

C'est-à-dire, en général que $\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{s}{t}\right)} = \frac{\left(\frac{t}{s}\right)}{\left(\frac{q}{p}\right)}$.

Ainſi $\frac{ac}{mn} \times \frac{m}{c} = \frac{\left(\frac{ac}{c}\right)}{\left(\frac{mn}{m}\right)} = \frac{a}{n}$.

$$\frac{15}{22} \times \frac{2}{5} = \frac{\left(\frac{15}{5}\right)}{\left(\frac{22}{2}\right)} = \frac{3}{11}\,; \quad \frac{9}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{\left(\frac{9}{3}\right)}{\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{3}{5}.$$

127 Si le produit des numérateurs eſt multiple d'un dénominateur quelconque, on le diviſera par ce dénominateur : le quotient qui réſultera de cette diviſion ſera le premier terme de la fraction qui doit exprimer le produit demandé, & l'autre dénominateur en ſera le ſecond terme.

Donc en général $\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{pt}{q}\right)}{s} = \frac{\left(\frac{pt}{s}\right)}{q}$.

Par exemple, $\frac{a}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{\left(\frac{am}{m}\right)}{n} = \frac{a}{n}$

$$\frac{2}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{\left(\frac{12}{3}\right)}{7} = \frac{4}{7}\,; \quad \frac{5}{7} \times \frac{14}{19} = \frac{\left(\frac{14 \times 5}{7}\right)}{19} = \frac{10}{19}.$$

128 Si le produit des dénominateurs eſt multiple d'un numérateur quelconque, on diviſera leur produit par ce numérateur qui en eſt aliquote, le quotient qui réſultera de cette diviſion ſera le ſecond terme du produit, & l'autre numérateur en ſera le premier terme.

Donc en général $\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{p}{\left(\frac{sq}{t}\right)} = \frac{t}{\left(\frac{sq}{p}\right)}$:

Ainſi $\frac{a}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{a}{\left(\frac{mn}{m}\right)} = \frac{a}{n}$:

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{3}{\left(\frac{36}{2}\right)} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}\,; \quad \frac{14}{8} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{\left(\frac{56}{14}\right)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Comme les réſultats trouvés par ces trois dernieres opérations ſeront plus ſimples que ceux que la premiere méthode donneroit dans

les mêmes cas, on préferera à cette premiere méthode celle des trois dernieres qui conviendra à la multiplication proposée, toutes les fois que l'on pourra en appliquer quelqu'une.

DÉMONSTRATION.

Pour multiplier deux quantités l'une par l'autre, on doit prendre le multiplicande, comme il est marqué par le multiplicateur (23): par conséquent pour multiplier la fraction $\frac{p}{s}$ par la fraction $\frac{t}{q}$, il faudra prendre la fraction $\frac{p}{s}$ un nombre de fois exprimé par $\frac{t}{q}$. Donc en multipliant la fraction $\frac{p}{s}$ par le numérateur t, le produit $\frac{pt}{s}$ qui en résulte est trop grand, puisqu'il falloit multiplier seulement par $\frac{t}{q}$ & non pas par t entier : donc ce produit est q fois aussi grand qu'il devroit être, & par conséquent on le doit diviser par q pour lui donner sa véritable valeur : mais on divisera $\frac{pt}{s}$ par q en multipliant son dénominateur s par q, puisqu'en le multipliant ainsi, le produit contiendra d'autant moins l'unité principale (86), donc $\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{pt}{sq}$.

Les trois autres méthodes de multiplication ne sont que des réductions par lesquelles on s'épargne d'introduire des diviseurs égaux dans les deux termes du produit : c'est ce qu'il est aisé de faire voir.

Pour le prouver, soit $\frac{mn}{ab}$ à multiplier par $\frac{b}{m}$, on aura

$$\frac{mn}{ab} \times \frac{b}{m} = \frac{bmn}{abm} = \frac{n}{a} \; (125) \text{; mais } \frac{\left(\frac{mn}{m}\right)}{\left(\frac{ab}{b}\right)} = \frac{n}{a}.$$

$$\text{Donc } \frac{\left(\frac{mn}{m}\right)}{\left(\frac{ab}{b}\right)} = \frac{bmn}{abm} = \frac{mn}{ab} \times \frac{b}{m}.$$

Mais on peut prendre la seconde fraction pour multiplicande aussi bien que la premiere.

Donc en général $\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{s}{t}\right)} = \frac{\left(\frac{t}{s}\right)}{\frac{q}{p}}$.

Soit $\frac{m}{a}$ à multiplier par $\frac{n}{m}$, on aura $\frac{m}{a} \times \frac{n}{m} = \frac{\left(\frac{mn}{m}\right)}{a} = \frac{n}{a}$;

car $\frac{m}{a} \times \frac{n}{m} = \frac{mn}{am} = \frac{n}{a}$; donc $\frac{mn}{am} = \frac{\left(\frac{mn}{m}\right)}{a} = \frac{m}{a} \times \frac{n}{m}$;

donc en général $\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{pt}{q}\right)}{s} = \frac{\left(\frac{pt}{s}\right)}{q}$.

Soit $\frac{a}{m}$ à multiplier par $\frac{m}{n}$, on aura $\frac{a}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{a}{\left(\frac{mn}{m}\right)} = \frac{a}{n}$;

car $\frac{a}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{mn} = \frac{a}{n}$; donc $\frac{a}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{a}{\left(\frac{mn}{m}\right)} = \frac{am}{mn} = \frac{a}{m} \times \frac{m}{n}$;

donc en général $\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{p}{\left(\frac{sq}{t}\right)} = \frac{t}{\left(\frac{sq}{p}\right)}$.

Donc enfin si l'on represente les quatre termes des deux fractions produisantes par les quantités indéterminées p, s, t, q, on aura

$$\frac{p}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{t}{q} \times \frac{p}{s} = \frac{pt}{sq} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{s}{t}\right)} = \frac{\left(\frac{t}{s}\right)}{\left(\frac{q}{p}\right)} = \frac{\left(\frac{pt}{q}\right)}{s} = \frac{\left(\frac{pt}{s}\right)}{q} = \frac{p}{\left(\frac{sq}{t}\right)} = \frac{t}{\left(\frac{sq}{p}\right)};$$

Ce qu'il falloit démontrer.

DE LA DIVISION.

Comme d'un côté ce n'eſt pas la même choſe de diviſer a par b ou de diviſer b par a, puiſque $\frac{a}{b}$ ne peut être égal à $\frac{b}{a}$ que quand a ſera égal à b, & que d'un autre nous ſuppoſons les quantités mixtes réduites en fractions, nous remarquerons qu'on peut avoir à diviſer 1°. un entier par une fraction, 2°. une fraction par un entier, 3°. une fraction par une fraction.

PREMIER CAS.

129 Pour diviſer un entier par une fraction, on prendra l'entier dividende pour le numérateur du quotient & on donnera à ce quotient pour dénominateur la fraction propoſée.

Ainſi en diviſant a par $\frac{n}{d}$, on aura pour quotient $\frac{a}{\left(\frac{n}{d}\right)}$:

En diviſant 6 par $\frac{9}{3}$, on aura $\frac{6}{\left(\frac{9}{3}\right)} = \frac{6}{3} = 2$.

Mais comme cette diviſion ne ſera poſſible que quand le numérateur de la fraction ſera multiple de ſon dénominateur, on ne pourra preſque jamais faire la diviſion d'un entier par une fraction en ſe ſervant de cette méthode. La ſuivante au contraire eſt toujours praticable.

130 On diviſera un entier pas une fraction en multipliant l'entier par le dénominateur de la fraction, & diviſant le produit par le déminateur. Si le produit de l'entier propoſé par le dénominateur eſt multiple du numérateur, le quotient deviendra une grandeur entiere.

Aïnſi $\frac{a}{\left(\frac{n}{d}\right)} = \frac{ad}{n}$, $\frac{am}{\left(\frac{m}{a}\right)} = \frac{a^2m}{m} = a^2$.

$\frac{3}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{15}{2}$; $\frac{4}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{12}{1} = 12$; $\frac{6}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{18}{2} = 9$.

SECOND CAS.

131 Pour diviser une fraction par un entier, on divisera le numérateur du dividende par l'entier, & on donnera au quotient le dénominateur de la fraction.

Ainsi pour diviser $\frac{ab}{c}$ par a, on aura $\frac{b}{c}$.

En divisant $\frac{6}{7}$ par 2, on aura $\frac{\left(\frac{6}{7}\right)}{2} = \frac{3}{7}$.

En divisant $\frac{8}{9}$ par 4, le quotient sera $\frac{2}{9}$.

Mais cette pratique ne sera possible que quand le numérateur du dividende sera multiple de l'entier diviseur : c'est pourquoi nous donnerons la méthode suivante, dont l'exécution est toujours possible puisqu'elle se pratique par multiplication.

132 On pourra toujours diviser une fraction par un entier, en multipliant le dénominateur du dividende par l'entier, & laissant subsister le même numérateur.

Ainsi si l'on divise $\frac{a}{b}$ par l'entier c, on aura $\frac{a}{bc}$.

Divisant $\frac{2}{3}$ par 5, le quotient sera $\frac{2}{15}$.

Divisant $\frac{7}{11}$ par 3, le quotient sera $\frac{7}{33}$.

Divisant $\frac{ab+bc}{m+n}$ par s, le quotient sera $\frac{ab+bc}{sm+sn}$.

DÉMONSTRATION.

(Premier Cas 129 & 130), $\frac{a}{\left(\frac{n}{d}\right)} = \frac{ad}{n}$; car en multipliant le premier quotient $\frac{a}{\left(\frac{n}{d}\right)}$ par le diviseur $\frac{n}{d}$, on aura $\frac{a}{\left(\frac{n}{d}\right)} \times \frac{n}{d} = a$ (38); faisant la même opération sur le second quotient $\frac{ad}{n}$, on aura $\frac{ad}{n} \times \frac{n}{d} = \frac{adn}{dn} = a$; donc $\frac{a}{\left(\frac{n}{d}\right)} = \frac{ad}{n}$. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

(Second Cas 131 & 132), la fraction $\frac{n}{d}$ divisée par l'entier a donnera pour quotient $\frac{\left(\frac{n}{a}\right)}{d}$ (131) $= \frac{n}{ad}$ (132), car le premier de ces deux quotiens n'est autre chose que l'indication de la division qu'on se propose de faire, & dans laquelle on a pour objet de diviser par l'entier a le nombre n des unités fractionnaires qu'on laisse de même valeur; & l'autre en laissant subsister le même nombre de parties n, & multipliant le dénominateur par a, rend les unités fractionnaires d'autant moindres.

D'ailleurs $\frac{\left(\frac{n}{a}\right)}{d} \times a = \frac{\left(\frac{n}{a}\right) \times a}{d}$ (125) $= \frac{n}{d}$.

Et $\frac{n}{ad} \times a = \frac{n}{d}$ (124). Donc $\frac{\left(\frac{n}{a}\right)}{d} = \frac{n}{ad}$ (*ax.* 2.), mais $\frac{n}{d}$ est le dividende proposé, & a est son diviseur, & les quotiens sont $\frac{\left(\frac{n}{d}\right)}{d}$, $\frac{n}{ad}$.

Donc la fraction $\frac{n}{d}$ divisée par l'entier a donnera $\frac{\left(\frac{n}{a}\right)}{d}$ ou $\frac{n}{ad}$ pour quotient (38). *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Troisième Cas.

133 Pour diviser une fraction par une fraction, l'opération la plus directe, mais qui est rarement praticable, est de diviser le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur, & le dénominateur du dividende par le dénominateur du diviseur.

Par exemple, $\frac{ab}{cd}$ étant pris pour dividende, & $\frac{b}{c}$ pour diviseur, le quotient sera $\frac{a}{d}$

Ainsi

Ainsi $\frac{\left(\frac{2}{9}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{1}\right)}{\left(\frac{9}{3}\right)} = \frac{2}{3}$, $\frac{\left(\frac{9}{16}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{9}{3}\right)}{\left(\frac{16}{4}\right)} = \frac{3}{4}$; c'est-à-dire, qu'en général, on aura $\frac{\left(\frac{p}{s}\right)}{\left(\frac{t}{q}\right)} = \frac{\left(\frac{p}{t}\right)}{\left(\frac{s}{q}\right)}$.

Mais lorsque chaque terme du diviseur ne sera pas aliquote du terme correspondant du dividende, cette méthode ne sera pas praticable puisqu'elle donnera deux termes fractionnaires qui ne se pourront pas réduire en une fraction simple.

134 Alors on remarquera que l'article précédent nous donne

$$\frac{\left(\frac{p}{s}\right)}{\left(\frac{t}{q}\right)} = \frac{\left(\frac{p}{t}\right)}{\left(\frac{s}{q}\right)} = \frac{p}{s} \times \frac{q}{t} \text{ (126); donc aussi } \frac{p}{s} \times \frac{q}{t} = \frac{\left(\frac{p}{t}\right)}{\left(\frac{s}{q}\right)}.$$

C'est-à-dire que si l'on veut diviser la fraction $\frac{p}{s}$ par la fraction $\frac{t}{q}$, on pourra renverser les deux termes du diviseur, & multiplier l'une par l'autre & terme par terme les fractions $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{t}$.

Donc en général $\frac{p}{s}$ divisé par $\frac{t}{q}$ sera égal à $\frac{p}{s} \times \frac{q}{t} = \frac{pq}{st}$.

Ainsi divisant $\frac{a}{b}$ par $\frac{m}{n}$, on aura pour produit $\frac{an}{bm}$.

Divisant $\frac{a+b}{c-d}$ par $\frac{c-d}{a+b}$, on aura $\frac{a^2+2ab+bb}{c^2-2cd+d^2}$.

Si l'on divise $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$, on aura pour quotient $\frac{2\times 7}{3\times 5} = \frac{14}{15}$.

Si l'on divise $\frac{3}{4}$ par $\frac{7}{8}$, le quotient sera $\frac{24}{28} = \frac{6}{7}$.

Mais puisqu'en renversant les termes du diviseur, la division de deux fractions se réduit à une multiplication, nous aurons donc encore trois méthodes de diviser une fraction par une fraction. Pour éviter les répétitions, nous supposerons dans les deux articles suivans que l'on se propose de diviser la fraction $\frac{p}{s}$ par la fraction $\frac{t}{q}$ appellant p le premier terme, s le second, t le troisiéme, & q le quatriéme : nous

nommerons auſſi le premier p, & le dernier q *les extrêmes*, le ſecond s, & le troiſieme t *les moïens*. Cela poſé.

135 Si le quatriéme terme eſt multiple du ſecond, & le troiſiéme multiple du premier ; ou autrement, ſi chacun des termes du dividende eſt aliquote du terme correſpondant du diviſeur, on aura pour quotient une fraction dont le numérateur ſera le quotient du quatriéme terme par le ſecond, & dont le dénominateur ſera le quotient du troiſiéme terme par le premier.

C'eſt-à-dire que $\dfrac{\left(\frac{p}{s}\right)}{\left(\frac{t}{q}\right)} = \dfrac{\left(\frac{q}{s}\right)}{\left(\frac{t}{p}\right)}$.

Car $\dfrac{\left(\frac{q}{s}\right)}{\left(\frac{t}{p}\right)} \times \dfrac{t}{q} = \dfrac{qt}{s} \times \dfrac{p}{qt} = \dfrac{pqt}{sqt} = \dfrac{p}{s}$.

Par exemple, $\frac{2}{3}$ diviſés par $\frac{8}{9} = \dfrac{\left(\frac{9}{3}\right)}{\left(\frac{8}{2}\right)} = \frac{3}{4}$

136 1°. Si le produit des extrêmes eſt multiple d'un des moïens, on diviſera ce produit par cet extrême pour en faire le numérateur du quotient auquel l'autre extrême ſervira de dénominateur.

C'eſt-à-dire, en général que $\dfrac{p}{s}$ diviſé par $\dfrac{t}{q} = \dfrac{\left(\frac{pq}{t}\right)}{s} = \dfrac{\left(\frac{pq}{s}\right)}{t}$.

Par exemple, $\dfrac{a}{c}$ diviſé par $\dfrac{m}{cn}$ ſera $\dfrac{\left(\frac{acn}{c}\right)}{m} = \dfrac{an}{m}$.

$\frac{4}{5}$ diviſés par $\frac{14}{15}$ ſera $\dfrac{\left(\frac{60}{5}\right)}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$.

2°. Si le produit des moïens eſt multiple d'un des extrêmes, diviſant ce produit par l'extrême qui en eſt aliquote, on fera du réſultat le dénominateur du quotient, & l'autre extrême en ſera le numérateur.

C'eſt-à-dire en général que $\dfrac{p}{s}$ diviſé par $\dfrac{t}{q} = \dfrac{p}{\left(\frac{st}{q}\right)} = \dfrac{q}{\left(\frac{st}{p}\right)}$.

Par exemple, $\frac{a}{cd}$ divisé par $\frac{m}{d} = \frac{a}{\left(\frac{cdm}{d}\right)} = \frac{a}{cm}$.

$\frac{5}{3}$ divisés par $\frac{6}{7}$ donnera $\frac{7}{\left(\frac{10}{3}\right)} = \frac{7}{10}$.

$\frac{7}{8}$ divisés par $\frac{14}{17} = \frac{17}{\left(\frac{14\times8}{7}\right)} = \frac{17}{16} = 1\,\frac{1}{16}$.

DÉMONSTRATION.

On démontrera facilement les méthodes expliquées ci-dessus, (n°s 133, 134, 135, 136), en faisant voir que le quotient trouvé par chacune d'elles, étant multiplié par le diviseur, restitue le dividende proposé, & que par conséquent chacun de ces quotiens en particulier est le vrai quotient que l'on cherche.

1°. (133) $\frac{p}{s}$ divisé par $\frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{p}{t}\right)}{\left(\frac{s}{q}\right)}$. Car $\frac{\left(\frac{p}{t}\right)}{\left(\frac{s}{q}\right)} \times \frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{p}{t}\right)\times t}{\left(\frac{s}{q}\right)\times q} = \frac{p}{s}$.

2°. (134) $\frac{p}{s}$ divisé par $\frac{t}{q} = \frac{pq}{st}$. Car $\frac{pq}{st} \times \frac{t}{q} = \frac{pqt}{sqt} = \frac{p}{s}$.

3°. (135) $\frac{p}{s}$ divisé par $\frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{q}{s}\right)}{\left(\frac{t}{p}\right)}$. Car $\frac{\left(\frac{q}{s}\right)}{\left(\frac{t}{p}\right)} \times \frac{t}{q} = \frac{qt}{s} \times \frac{p}{qt} = \frac{pqt}{sqt} = \frac{p}{s}$.

4°. (136. 1°.) $\frac{p}{s}$ divisé par $\frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{pq}{t}\right)}{s} = \frac{\left(\frac{pq}{s}\right)}{t}$.

Car $\frac{\left(\frac{pq}{t}\right)}{s} \times \frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{pq}{t}\right)\times t}{sq} = \frac{pq}{sq} = \frac{p}{s}$; & $\frac{\left(\frac{pq}{s}\right)}{t} \times \frac{t}{q} = \frac{\left(\frac{pqt}{s}\right)}{qt} = \frac{p}{s}$.

5°. (136. 2°.) $\frac{p}{s}$ divisé par $\frac{t}{q} = \frac{p}{\left(\frac{st}{q}\right)} = \frac{q}{\left(\frac{st}{p}\right)}$.

Car $\frac{p}{\left(\frac{st}{q}\right)} \times \frac{t}{q} = \frac{pt}{\left(\frac{stq}{q}\right)} = \frac{pt}{st} = \frac{p}{s}$; & $\frac{q}{\left(\frac{st}{q}\right)} \times \frac{t}{q} = \frac{qt}{\left(\frac{qst}{p}\right)} = \frac{pqt}{qst} = \frac{p}{s}$.

Et en rassemblant les quatre méthodes sous un seul point de vûe ; on aura. Donc

$$\frac{\left(\frac{p}{s}\right)}{\left(\frac{t}{q}\right)}=\frac{\left(\frac{p}{t}\right)}{\left(\frac{s}{q}\right)}=\frac{pq}{st}=\frac{\left(\frac{q}{s}\right)}{\left(\frac{t}{p}\right)}=\frac{\left(\frac{pq}{t}\right)}{s}=\frac{\left(\frac{pq}{s}\right)}{t}=\frac{p}{\left(\frac{st}{q}\right)}=\frac{q}{\left(\frac{ts}{p}\right)}:$$

Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque.

Nous avons vû (82) que le Calcul des fractions nous donneroit une méthode pour approcher à l'infini de la valeur exacte du quotient d'une division algébrique imparfaite. Nous voici parvenus au point de découvrir l'ordre de ces suites infinies qui ne sont autre chose que des progressious de fractions qui vont toujours en décroissant selon une loi que le calcul nous fera trouver facilement.

137 Pour approcher à l'infini de la véritable valeur du quotient d'une division algébrique impossible ou imparfaite, c'est-à-dire d'une division dans laquelle le dividende ne contient pas exactement le diviseur.

On écrira le dividende & le diviseur à l'ordinaire, & on fera la division tant des entiers que des fractions suivant les regles indiquées pour diviser chacune de ces deux différentes especes de quantités.

Si l'on propose de diviser $pt+pq\pm ts\pm qs\pm r$ par $p\pm s$, nous supposerons pour une plus parfaite intelligence que

$\pm r$ exprime le reste de la division, ou la quantité qui ne contient pas le diviseur,

$+p$ represente le premier terme du diviseur qu'on suppose plus grand que s

$\pm s$ désigne le second terme du même diviseur.

Cette opération renferme necessairement quatre différens cas ;

$$\text{On peut avoir}\begin{cases}1^{o}.\ pt+pq+ts+qs+r\\2^{o}.\ pt+pq+ts+qs-r\end{cases}\text{à diviser par } p+s.$$

$$\begin{cases}3^{o}.\ pt+pq-ts-qs+r\\4^{o}.\ pt+pq-ts-qs-r\end{cases}\text{à diviser par } p-s.$$

EXEMPLE I.

Dividende $pt + pq + ts + qs + r$

Diviseur $p + s$

$$t + q + \frac{r}{p} - \frac{rs}{pp} + \frac{rss}{p^3} - \frac{rs^3}{p^4} + \frac{rs^4}{p^5} - \frac{rs^5}{p^6} + \frac{rs^6}{p^7}, \ \&c.$$

Suite infinie qui exprime le quotient.

1er. reste $-\frac{rs}{p}$

2^e^. reste $+\frac{rss}{pp}$

3e. reste $-\frac{rs^3}{p^3}$

4e. reste $+\frac{rs^4}{p^4}$

5e. reste $-\frac{rs^5}{p^5}$

6e. reste $+\frac{rs^6}{p^6}$

&c.

Donc quand le dividende & le diviseur seront entierement positifs, les termes de la suite infinie du quotient seront alternativement positifs & négatifs, à commencer du premier terme $+\frac{r}{p}$ qui contiendra le reste r divisé par le premier terme p du diviseur.

EXEMPLE II.

Dividende $pt + pq + ts + qs - r$

Diviseur $p + s$

$$t + q - \frac{r}{p} + \frac{rs}{p^2} - \frac{rs^2}{p^3} + \frac{rs^3}{p^4} - \frac{rs^4}{p^5} + \frac{rs^5}{p^6} - \frac{rs^6}{p^7}, \ \&c.$$

Quotient ou suite infinie.

1er. reste $+\frac{rs}{p}$

2e. reste $-\frac{rs^2}{p^2}$

3e. reste $+\frac{rs^3}{p^3}$

4e. reste $-\frac{rs^4}{p^4}$

5e. reste $+\frac{rs^5}{p^5}$

6e. reste $-\frac{rs^6}{p^6}$ &c.

Donc si le reste r est négatif & le diviseur $p+s$ positif, tous les termes fractionnaires de la suite infinie du quotient seront alternativement négatifs & positifs, à commencer par celui qui aura pour numérateur ce reste r sans autre multiplicateur que l'unité, c'est-à-dire à commencer par $-\frac{r}{p}$.

EXEMPLE III.

Dividende $pt+pq-qs-ts+r$; Diviseur $p-s$

Quotient en suite infinie : $t+q+\frac{r}{p}+\frac{rs}{pp}+\frac{rs^2}{p^3}+\frac{rs^3}{p^4}+\frac{rs^4}{p^5}+\frac{rs^5}{p^6}+\frac{rs^6}{p^7}$, &c.

1er. reste	$+\frac{rs}{p}$
2e. reste	$+\frac{rs^2}{p^2}$
3e. reste	$+\frac{rs^3}{p^3}$
4e. reste	$+\frac{rs^4}{p^4}$
5e. reste	$+\frac{rs^5}{p^5}$
6e. reste	$+\frac{rs^6}{p^6}$
	&c.

Donc si le reste $+r$ de la division exacte des entiers est positif & que le diviseur ait son second terme négatif, c'est-à-dire si le diviseur est $p-s$, tous les termes de la suite infinie qui contiennent r dans le quotient seront positifs, & seront par conséquent précédés du signe $+$.

EXEMPLE IV.

Dividende	Diviseur
$pt+pq-qs-st-r$	$p-s$
	$t+q-\frac{r}{p}-\frac{rs}{pp}-\frac{rs^2}{p^3}-\frac{rs^3}{p^4}-\frac{rs^4}{p^5}-\frac{rs^5}{p^6}-\frac{rs^6}{p^7}$, &c.
	Suite infinie ou quotient.
1er. reste $-\frac{rs}{p}$	
2e. reste $-\frac{rs^2}{p^2}$	
3e. reste $-\frac{rs^3}{p^3}$	
4e. reste $-\frac{rs^4}{p^4}$	
5e. reste $-\frac{rs^5}{p^5}$	
6e. reste $-\frac{rs^6}{p^6}$	
&c.	

Donc tous les termes de la suite infinie qui contiennent le reste r seront négatifs, quand r lui même sera négatif, & que le second terme s du diviseur sera aussi négatif.

On a pû voir par la maniere dont se forment ces suites.

1°. qu'on peut approcher à l'infini du quotient cherché sans avoir jamais de terme égal à zero. Car pour avoir un terme de la suite égal à zero, il faudroit qu'un de ses produisans r, s, p, fut égal à zero. Or si $r=0$, la division se fera exactement, & la suite n'aura pas lieu, si $s=0$, le dividende sera réduit à $pt+pq$ qu'on divisera exactement par p : Il en sera de même si $p=0$, car alors on auroit pour dividende $qs+st$ quon peut diviser par s.

Mais si l'on suppose que $s=0$, ou $p=0$, seulement dans le diviseur, & qu'il ait une valeur réelle dans le dividende, on aura donc le dividende proposé à diviser par p ou par s. Dans le premier cas le quotient est $t+q+\frac{qs+rt}{p}$, & dans le dernier on aura $t+q+\frac{st+rt}{s}$, & la suite infinie n'aura pas lieu, donc la suite infinie ne peut jamais avoir de terme égal à zero.

2°. Cependant comme on peut approcher à l'infini de la valeur cherchée en continuant la ſuite auſſi loin qu'on le voudra, on peut, ſaus erreur ſenſible regarder une pareille ſuite infinie comme le vrai quotient du dividende propoſé.

3°. Les termes de cette ſuite ſeront d'autant plus petits que le dénominateur ſera plus grand par rapport au numérateur. Ainſi un terme quelconque $\frac{rs^n}{p^{n+1}}$ ſera infiniment petit, ſi p^{n+1} contient une infinité de fois rs^n.

4°. Enfin on continuera ces ſuites auſſi loin qu'on voudra en multipliant continuellement le dernier terme trouvé par la fraction $\pm\frac{s}{p}$: car le premier terme étant toujours neceſſairement $\pm\frac{r}{p}$, on peut voir que les termes ſuivans ſont formés de la multiplication de ce premier terme $\pm\frac{r}{p}$ par la fraction $\pm\frac{s}{p}$, c'eſt-à-dire, que le premier terme $\pm\frac{r}{p}$ eſt continuellement multiplié par le ſecond terme du diviſeur & diviſé par le premier.

II.

DES FRACTIONS VULGAIRES.

138 Nous avons vû (9) qu'une partie de l'unité étoit ſouvent elle même priſe pour unité: l'uſage a établi dans chaque eſpece de grandeurs différentes diviſions & ſubdiviſions de l'unité principale, & chacune des parties de cette unité ainſi diviſée a été nommée d'un nom particulier, en ſorte que ce même uſage en fait autant d'unités principales. Mais comme ces prétendues unités ſont aliquotes de l'unité principale, nous les regarderons comme des fractions & nous en expliquerons le Calcul par celui des fractions.

Nous conſidererons donc dans l'étenduë, la toiſe comme l'unité principale, à laquelle nous rapporterons les autres méſures de l'étenduë, & comme la toiſe contient ſix pieds & le pied douze pouces, nous regarderons le pied comme $\frac{1}{6}$ de la toiſe & le pouce comme $\frac{1}{12}$ du pied ou $\frac{1}{72}$ de la toiſe.

Dans la peſanteur, la livre étant priſe pour unité principale, nous prendrons l'once pour $\frac{1}{16}$ de la livre, & le gros pour $\frac{1}{8}$ de l'once.

Dans la durée le jour ſera la meſure fixe ou unité principale, l'heure $\frac{1}{2}$ du jour, & la minute $\frac{1}{60}$ de l'heure.

Dans la monnoïe nous prendrons la livre pour unité principale, dont le ſou ſera $\frac{1}{20}$, & le denier $\frac{1}{240}$ ou $\frac{1}{12}$ du ſou.

Enfin

Enfin pour la commodité du Calcul nous regarderons chacune de ces especes comme étant l'unité principale de l'espece immédiatement au dessous, en sorte que dans l'étenduë, par exemple en calculant les pouces nous supposerons que le pied est l'unité principale à laquelle cette mesure doit être raportée, & lorsque nous calculerons les pieds, nous les regarderons comme des fractions de la toise prise pour unité principale à son tour.

REMARQUES.

Il est à propos de remarquer que dans ce que nous avons vû jusqu'à présent, nous n'avons eu pour objet que des quantités abstraites, & par conséquent les résultats des opérations nous ont toujours pareillement donné des quantités abstraites. Au contraire la plupart des quantités qui entrent dans le Calcul des fractions vulgaires étant des grandeurs concretes, on doit examiner de quelle nature seront les résultats des opérations relativement à la nature des quantités sur lesquelles on a opéré.

Par exemple il est clair qu'on ne peut ajouter ensemble que des quantités de même espece. Savoir : de l'étendue avec de l'étendue, la durée à la durée, la pesanteur à la pesanteur, la monnoïe à la monnoïe, &c. & par conséquent la somme sera de la même espece que les quantités ajoutées.

On voit également qu'on ne peut soustraire une quantité concrete, que d'une quantité concrete de même espece, on ne peut soustraire une partie d'étendue que d'une partie d'étendue, on ne peut retrancher de la durée que sur une quantité de durée. La pesanteur ne peut être ôtée que de la pesanteur, & toute autre chose qu'une quantité de monnoïe ne pourroit être soustraite d'une autre quantité de monnoïe ; par conséquent le soustréande, le soustracteur & la différence seront nécessairement de même espece.

Donc dans l'addition & dans la soustraction toutes les quantités qui entrent dans une même opération sont homogenes entre elles & avec les résultats.

DE L'ADDITION.

139 Pour ajouter ensemble plusieurs fractions vulgaires unies à des entiers, comme on sait comment chacune est contenue dans l'unité à laquelle elle a rapport, c'est-à-dire comme on connoît le dénominateur de chacune, on les écrira les unes sous les autres après les entiers ausquels elles sont unies en plaçant dans une même colomne celles

de même espece, & au lieu d'écrire le dénominateur de chaque colomne, on mettra en haut & à la droite un caractere qui désigne l'espece qui est comprise dans cette colomne.

Ensuite on fera l'addition en ajoutant d'abord tous les chiffres compris dans la colomne de la plus basse espece.

1°. Si la somme est moindre que le nombre qui marque comment l'espece actuelle est contenue dans l'espece superieure suivante, (c'est-à-dire si le numérateur est moindre que le dénominateur) on placera dans la même colomne & au dessous, la somme de cette colomne.

2°. Si la somme est précisement une ou plusieurs fois égale au nombre qui marque comment l'espece suivante contient l'espece actuelle, on mettra un zero sous la colomne & on retiendra pour ajouter avec la colomne suivante autant d'unités qu'on a trouvé de fois le dénominateur contenu dans la somme des numérateurs.

3°. Enfin si l'on trouve pour somme un nombre qui contienne une ou plusieurs fois le dénominateur avec une ou plusieurs unités fractionnaires, on posera ces unités fractionnaires de surcroît dans la même colomne & au dessous, & on ajoutera à la colomne suivante autant d'unités qu'on a trouvé de fois cette somme multiple du dénominateur.

EXEMPLE I.

87 *Toises*	5 *Pieds*	9 *Pouces*	7 *Lignes*
253	4	7	8
341	3	6	9
55	2	11	10
124	0	8	2
862^T	5^P	5^p	0^L

1°. On trouvera 36 lignes qui font 3 pouces, on posera donc zero dans la colomne des lignes & on retiendra 3 pour compter avec les pouces.

2°. Ajoutant ces 3 retenus avec les pouces on aura 44 pouces qui valent 3 pieds 8 pouces, on posera 8 sous les pouces & on retiendra 3 pour compter avec les pieds.

3°. Ajoutant à la colomne des pieds ces 3 retenus, la somme 17 vaut 17 pieds ou 2 toises 5 pieds, on posera donc 5 dans la colomne des pieds, & on retiendra 2 pour compter avec les toises.

Enfin on ajoutera les 2 retenus avec la colomne des unités des toises & on continuera l'opération à l'ordinaire.

S'il manque quelque espece dans les quantités proposées, par exemple si l'on avoit dans une des quantités précedentes des toises & des pouces, sans pieds ; on rempliroit par autant de zeros les places vuides que laisseroit ce défaut d'especes quelconques.

Comme ces choses sont très faciles & que l'exemple précedent a été assez détaillé pour en appliquer les principes à tout autre exemple, nous nous dispenserons d'expliquer davantage les exemples suivans.

EXEMPLE II.

1256 *livres*	14 *onces*	6 *gros*
437	8	5
901	0	4
3743	11	7
52	15	0
6392 ₶	2 ℥	6 ʒ

EXEMPLE III.

3 *ans*	7 *mois*	25 *jours*	21 *heures*	35 *minutes*
32	2	12	22	32
25	3	2	4	50
37	6	4	18	14
98 *ans*	7 *mois*	15 *jours*	19 *heures*	11 *minutes*

EXEMPLE IV.

1145 ₶	17 ß	9 d
45320	15	4
82	7	8
543	12	7
54	14	0
2301	0	10
4532	5	4
53980 ₶	13 ß	6 d

On voit assez dans ces exemples qu'on retiendra autant d'onces qu'on aura trouvé de fois 8 gros, autant de livres qu'on trouvera de fois 16 onces. Que pour 60 minutes on retiendra une heure, pour 24 heures un jour, pour trente jours un mois, & pour 12 mois un an.

De même on retiendra autant de sols qu'on aura trouvé de douzaines de deniers, & autant de livres qu'on aura trouvé de fois 20 sols.

Cette regle est suffisamment démontrée (18 & 121).

DE LA SOUSTRACTION.

140 Pour soustraire l'une de l'autre deux grandeurs mixtes composées d'entiers & de fractions vulgaires, on écrira ces quantités l'une sous l'autre en sorte que celles de chaque espece se répondent, ensuite on soustraira la plus basse espece du soustracteur sur la plus basse espece du soustréande & il peut arriver trois cas.

1°. Ou le chiffre inférieur sera plus petit que le superieur correspondant, & alors on le retranchera sur ce chifre plus grand, & on écrira le reste au dessous.

2°. Ou ces deux chifres seront égaux, ~~& dans ce cas en retranchant~~ l'un de l'autre il ne restera rien.

3°. Ou enfin le chifre inférieur sera plus grand que le superieur correspondant, alors on ajoutera à ce chifre supérieur une unité de l'espece immédiatement suivante à gauche, & de cette somme on retranchera le chifre inférieur, retenant ensuite une unité pour ajouter au chifre inférieur de l'espece suivante.

On continuera l'opération comme à l'ordinaire (20).

EXEMPLE I.

De	457 T	3 P	6 P	9 L
on veut retrancher	248 T	5 P	6 P	7 L
	208 T	4 P	0 P	2 L

On voit dans cet exemple que retranchant 7 lignes de 9 lignes il reste 2 lignes; retranchant 6 pouces de 6 pouces il ne reste rien: enfin pour retrancher 5 pieds de 3 pieds, j'ajoute aux trois pieds une toise qui fait 6 pieds, la somme est 9 pieds j'en retranche 5, & il en reste 4. Mais pour ne rien changer à la valeur de la différence, j'augmente d'une unité le chifre inférieur suivant 8, & je soustrais 8 + 1, ou 9 de 7 ou plûtôt de 17 comme dans la soustraction ordinaire (20).

Cet exemple aïant été assez détaillé, on se dispensera de faire des remarques semblables sur les exemples suivans, parce qu'il est facile d'y appliquer les remarques précédentes.

EXEMPLE II.

De	487 lb	13 ℥	4 ʒ
on veut retrancher	99 lb	14 ℥	5 ʒ
	387 lb	14 ℥	7 ʒ

EXEMPLE III.

De	32 *ans*	2 *mois*	12 *jours*	2 *heures*	32 *minutes*
on veut soustraire	25	3	7	4	15
	6 *ans*	11 *mois*	4 *jours*	22 *heures*	17 *minutes*

EXEMPLE IV.

Sur	1045 ᵗᵗ	12 ᶠ	4 ᵈ
on veut ôter	586 ᵗᵗ	15 ᶠ	7 ᵈ
	458 ᵗᵗ	16 ᶠ	9 ᵈ

REMARQUE.

Avant de passer à la multiplication & à la division, il est nécessaire de remarquer qu'on a souvent besoin dans ces deux opérations de réduire des quantités d'une certaine espece à une autre espece du même genre; par exemple, des toises en pieds, des pieds en toises ou en pouces, &c. & d'évaluer les fractions que donne le calcul au-dessous des plus basses especes proposées.

141 On réduira les grandes especes aux petites en multipliant leur nombre par celui qui exprime comment l'espece qu'on veut réduire contient celle à laquelle on veut la réduire.

Ainsi on réduira les toises en pieds en les multipliant par 6, on réduira les pieds en pouces en les multipliant par 12 : on pourra s'il en est besoin réduire les toises en pouces par une seule opération, en les multipliant par $72 = 6 \times 12$.

On sçaura combien un certain nombre de livres contient d'onces en le multipliant par 16, ou combien un nombre d'onces vaut de gros en le multipliant par 8.

On trouvera combien plusieurs mois contiennent de jours en multipliant leur nombre par 30 (sauf à ajouter 5 jours pour chaque année ou chaque fois douze mois), en multipliant par 24 un certain nombre de jours on connoîtra le nombre d'heures qui y est contenu. On trouvera de même les minutes en multipliant le nombre des heures par 60.

On réduira des livres en sols en multipliant le nombre de livres à réduire par 20, & les sols seront réduits en deniers si on multiplie leur nombre par 12.

142 Par des opérations contraires on réduira les petites especes aux grandes en divisant le nombre de ces petites especes à réduire par le nombre qui marque comment cette espece inférieure à réduire est contenue dans l'espece de même genre à laquelle on veut la réduire.

C'est-à-dire qu'en divisant par 12 on réduira les lignes en pouces & les pouces en pieds, & qu'en divisant par 6, on trouvera combien un certain nombre de pieds contient de toises.

On réduira de même les gros en onces & les onces en livres, en divisant le nombre des gros par 8 & celui des onces par 16.

Si l'on divise un nombre de minutes par 60, on trouvera le nombre d'heures qui y est contenu, on trouvera de même le nombre de jours de mois & d'années contenu dans un certain nombre d'heures de jours ou de mois en divisant ce nombre par 24, par 30, ou par 12.

Enfin on aura le nombre de sols contenu dans un nombre de deniers, en divisant le nombre de deniers proposé par 12, & le nombre de livres contenu dans un nombre de sols en divisant par 20 le nombre de sols proposé.

143 L'évaluation des fractions n'est autre chose qu'une réduction de fractions génériques en fractions vulgaires : cette réduction a lieu lorsque dans un calcul on trouve des fractions différentes de celles, auxquelles l'usage a donné des noms particuliers ; par exemple si l'on a les $\frac{2}{3}$ d'une toise, les $\frac{3}{4}$ d'un pied, les $\frac{14}{15}$ d'une année, les $\frac{2}{3}$ d'un mois, les $\frac{11}{12}$ d'un jour, d'une heure, les $\frac{7}{8}$ d'une livre pesant, les $\frac{3}{4}$ d'une livre de monnoïe, &c. on multipliera le numérateur de cette fraction par

le nombre qui marque comment l'espece à laquelle on veut la réduire est contenue dans l'espece supérieure dont la fraction proposée fait partie, & divisant ce produit par le numérateur de cette même fraction, le quotient sera le numérateur de la fraction vulgaire qui en résultera, c'est-à-dire le nombre demandé d'unités fractionnaires inférieures.

Par exemple les $\frac{2}{3}$ d'une toise seront 4 pieds, car $2 \times 6 = 12$, & $\frac{12}{3} = 4$. Les $\frac{3}{4}$ d'un pied sont 9 pouces, car $3 \times 12 = 36$, & $\frac{36}{4} = 9$. On aura de même pour les $\frac{11}{12}$ d'un jour, $11 \times 24 = 264$, $\frac{264}{12} = 22$ ou 22 heures; on trouvera aussi que les $\frac{7}{8}$ d'une livre valent 14 onces, que les $\frac{3}{5}$ d'une livre de monnoïe valent 12 sols, &c.

Mais cette réduction ne pourra se faire qu'autant que le dénominateur de la fraction sera aliquote du dénominateur vulgaire auquel on veut réduire. Dans tout autre cas, il faudra se contenter d'un à peu près. Par exemple si l'on demandoit les $\frac{7}{13}$ d'une livre, comme 13 ne pourra diviser ni 20 nombre de sols contenus dans livre, ni 240 nombre de den., on aura pour la valeur des $\frac{7}{13}$ de la livre, $10^{ß}\ 1\frac{7}{13}{}^{d}$, & l'on pourra négliger la fraction $\frac{7}{13}$ de deniers.

144 Pour connoître d'un coup d'oeil quand cette réduction sera exacte, & quand elle ne pourra pas l'être, on va donner trois tables des parties de la toise de la livre de pesanteur & de la livre de monnoïe ou toutes les fractions vulgaires qui en dépendent répondront à des fractions génériques réduites à leurs plus simples termes : comme ces trois especes de quantités sont celles dont le calcul est le plus ordinaire, ces trois tables doivent suffire pour les opérations les plus fréquentes.

Dans toutes ces tables les fractions aliquotes de leur tout sont celles qui ont l'unité pour numérateur. Toutes les autres sont des fractions aliquantes, c'est-à-dire contiennent chacune plusieurs aliquotes de l'entier dont elles sont parties.

Table des Fractions de la Toise.

pieds	*pouces*	*valeurs*	*pieds*	*pouces*	*valeurs*	*pieds*	*pouces*	*valeurs*
0	1	$\frac{1}{72}$	2	1	$\frac{25}{72}$	4	1	$\frac{49}{72}$
0	2	$\frac{1}{36}$	2	2	$\frac{13}{36}$	4	2	$\frac{25}{36}$
0	3	$\frac{1}{24}$	2	3	$\frac{3}{8}$	4	3	$\frac{17}{24}$
0	4	$\frac{1}{18}$	2	4	$\frac{7}{18}$	4	4	$\frac{13}{18}$
0	5	$\frac{5}{72}$	2	5	$\frac{29}{72}$	4	5	$\frac{53}{72}$
0	6	$\frac{1}{12}$	2	6	$\frac{5}{12}$	4	6	$\frac{3}{4}$
0	7	$\frac{7}{72}$	2	7	$\frac{31}{72}$	4	7	$\frac{55}{72}$
0	8	$\frac{1}{9}$	2	8	$\frac{4}{9}$	4	8	$\frac{7}{9}$
0	9	$\frac{1}{8}$	2	9	$\frac{11}{24}$	4	9	$\frac{19}{24}$
0	10	$\frac{5}{36}$	2	10	$\frac{17}{30}$	4	10	$\frac{29}{36}$
0	11	$\frac{11}{72}$	2	11	$\frac{35}{72}$	4	11	$\frac{59}{72}$
1	0	$\frac{1}{6}$	3	0	$\frac{1}{2}$	5	0	$\frac{5}{6}$
1	1	$\frac{13}{72}$	3	1	$\frac{37}{72}$	5	1	$\frac{61}{72}$
1	2	$\frac{7}{36}$	3	2	$\frac{19}{36}$	5	2	$\frac{31}{36}$
1	3	$\frac{5}{24}$	3	3	$\frac{13}{24}$	5	3	$\frac{7}{8}$
1	4	$\frac{2}{9}$	3	4	$\frac{5}{9}$	5	4	$\frac{8}{9}$
1	5	$\frac{17}{72}$	3	5	$\frac{41}{72}$	5	5	$\frac{65}{72}$
1	6	$\frac{1}{4}$	3	6	$\frac{7}{12}$	5	6	$\frac{11}{12}$
1	7	$\frac{19}{72}$	3	7	$\frac{43}{72}$	5	7	$\frac{67}{72}$
1	8	$\frac{5}{18}$	3	8	$\frac{11}{18}$	5	8	$\frac{17}{18}$
1	9	$\frac{7}{24}$	3	9	$\frac{5}{8}$	5	9	$\frac{23}{24}$
1	10	$\frac{11}{36}$	3	10	$\frac{23}{36}$	5	10	$\frac{35}{16}$
1	11	$\frac{23}{72}$	3	11	$\frac{47}{72}$	5	11	$\frac{71}{72}$
2	0	$\frac{1}{3}$	4	0	$\frac{2}{3}$	6	0	*l'entier* 1 *ou* $\frac{72}{72}$

Table

Table des Fractions de la Livre de Poids de Marc.

onces	*gros*	*valeurs*	*onces*	*gros*	*valeurs*	*onces*	*gros*	*valeurs*
0	1	$\frac{1}{128}$	2	6	$\frac{11}{64}$	5	3	$\frac{43}{128}$
0	2	$\frac{1}{64}$	2	7	$\frac{23}{128}$	5	4	$\frac{11}{32}$
0	3	$\frac{3}{128}$	3	0	$\frac{3}{16}$	5	5	$\frac{45}{128}$
0	4	$\frac{1}{32}$	3	1	$\frac{25}{128}$	5	6	$\frac{23}{64}$
0	5	$\frac{5}{128}$	3	2	$\frac{13}{64}$	5	7	$\frac{47}{128}$
0	6	$\frac{3}{64}$	3	3	$\frac{27}{128}$	6	0	$\frac{3}{8}$
0	7	$\frac{7}{128}$	3	4	$\frac{7}{32}$	6	1	$\frac{49}{128}$
1	0	$\frac{1}{16}$	3	5	$\frac{29}{128}$	6	2	$\frac{25}{64}$
1	1	$\frac{9}{128}$	3	6	$\frac{15}{64}$	6	3	$\frac{51}{128}$
1	2	$\frac{5}{64}$	3	7	$\frac{31}{128}$	6	4	$\frac{13}{32}$
1	3	$\frac{11}{128}$	4	0	$\frac{1}{4}$	6	5	$\frac{53}{128}$
1	4	$\frac{3}{32}$	4	1	$\frac{33}{128}$	6	6	$\frac{27}{64}$
1	5	$\frac{13}{128}$	4	2	$\frac{17}{64}$	6	7	$\frac{55}{128}$
1	6	$\frac{7}{64}$	4	3	$\frac{35}{128}$	7	0	$\frac{7}{16}$
1	7	$\frac{15}{128}$	4	4	$\frac{9}{32}$	7	1	$\frac{57}{128}$
2	0	$\frac{1}{8}$	4	5	$\frac{37}{128}$	7	2	$\frac{29}{64}$
2	1	$\frac{17}{128}$	4	6	$\frac{19}{64}$	7	3	$\frac{59}{128}$
2	2	$\frac{9}{64}$	4	7	$\frac{39}{128}$	7	4	$\frac{15}{32}$
2	3	$\frac{19}{128}$	5	0	$\frac{5}{16}$	7	5	$\frac{61}{128}$
2	4	$\frac{5}{32}$	5	1	$\frac{41}{128}$	7	6	$\frac{31}{64}$
2	5	$\frac{21}{128}$	5	2	$\frac{21}{64}$	7	7	$\frac{63}{128}$

Table des Fractions de la Toise.

pieds	pouces	valeurs	pieds	pouces	valeurs	pieds	pouces	valeurs
0	1	$\frac{1}{72}$	2	1	$\frac{25}{72}$	4	1	$\frac{49}{72}$
0	2	$\frac{1}{36}$	2	2	$\frac{13}{36}$	4	2	$\frac{25}{36}$
0	3	$\frac{1}{24}$	2	3	$\frac{3}{8}$	4	3	$\frac{17}{24}$
0	4	$\frac{1}{18}$	2	4	$\frac{7}{18}$	4	4	$\frac{13}{18}$
0	5	$\frac{5}{72}$	2	5	$\frac{29}{72}$	4	5	$\frac{53}{72}$
0	6	$\frac{1}{12}$	2	6	$\frac{5}{12}$	4	6	$\frac{3}{4}$
0	7	$\frac{7}{72}$	2	7	$\frac{31}{72}$	4	7	$\frac{55}{72}$
0	8	$\frac{1}{9}$	2	8	$\frac{4}{9}$	4	8	$\frac{7}{9}$
0	9	$\frac{1}{8}$	2	9	$\frac{11}{24}$	4	9	$\frac{19}{24}$
0	10	$\frac{5}{36}$	2	10	$\frac{17}{30}$	4	10	$\frac{29}{36}$
0	11	$\frac{11}{72}$	2	11	$\frac{35}{72}$	4	11	$\frac{59}{72}$
1	0	$\frac{1}{6}$	3	0	$\frac{1}{2}$	5	0	$\frac{5}{6}$
1	1	$\frac{13}{72}$	3	1	$\frac{37}{72}$	5	1	$\frac{61}{72}$
1	2	$\frac{7}{36}$	3	2	$\frac{19}{36}$	5	2	$\frac{31}{36}$
1	3	$\frac{5}{24}$	3	3	$\frac{13}{24}$	5	3	$\frac{7}{8}$
1	4	$\frac{2}{9}$	3	4	$\frac{5}{9}$	5	4	$\frac{2}{9}$
1	5	$\frac{17}{72}$	3	5	$\frac{41}{72}$	5	5	$\frac{65}{72}$
1	6	$\frac{1}{4}$	3	6	$\frac{7}{12}$	5	6	$\frac{11}{12}$
1	7	$\frac{19}{72}$	3	7	$\frac{43}{72}$	5	7	$\frac{67}{72}$
1	8	$\frac{5}{18}$	3	8	$\frac{11}{18}$	5	8	$\frac{17}{18}$
1	9	$\frac{7}{24}$	3	9	$\frac{5}{8}$	5	9	$\frac{23}{24}$
1	10	$\frac{11}{36}$	3	10	$\frac{23}{36}$	5	10	$\frac{35}{36}$
1	11	$\frac{23}{72}$	3	11	$\frac{47}{72}$	5	11	$\frac{71}{72}$
2	0	$\frac{1}{3}$	4	0	$\frac{2}{3}$	6	0	l'entier 1 ou $\frac{72}{72}$

Table

Table des Fractions de la Livre de Poids de Marc.

onces	*gros*	*valeurs*	*onces*	*gros*	*valeurs*	*onces*	*gros*	*valeurs*
0	1	$\frac{1}{128}$	2	6	$\frac{11}{64}$	5	3	$\frac{43}{128}$
0	2	$\frac{1}{64}$	2	7	$\frac{23}{128}$	5	4	$\frac{11}{32}$
0	3	$\frac{3}{128}$	3	0	$\frac{3}{16}$	5	5	$\frac{45}{128}$
0	4	$\frac{1}{32}$	3	1	$\frac{25}{128}$	5	6	$\frac{23}{64}$
0	5	$\frac{5}{128}$	3	2	$\frac{13}{64}$	5	7	$\frac{47}{128}$
0	6	$\frac{3}{64}$	3	3	$\frac{27}{128}$	6	0	$\frac{3}{8}$
0	7	$\frac{7}{128}$	3	4	$\frac{7}{32}$	6	1	$\frac{49}{128}$
1	0	$\frac{1}{16}$	3	5	$\frac{29}{128}$	6	2	$\frac{25}{64}$
1	1	$\frac{9}{128}$	3	6	$\frac{15}{64}$	6	3	$\frac{51}{128}$
1	2	$\frac{5}{64}$	3	7	$\frac{31}{128}$	6	4	$\frac{13}{32}$
1	3	$\frac{11}{128}$	4	0	$\frac{1}{4}$	6	5	$\frac{53}{128}$
1	4	$\frac{3}{32}$	4	1	$\frac{33}{128}$	6	6	$\frac{27}{64}$
1	5	$\frac{13}{128}$	4	2	$\frac{17}{64}$	6	7	$\frac{55}{128}$
1	6	$\frac{7}{64}$	4	3	$\frac{35}{128}$	7	0	$\frac{7}{16}$
1	7	$\frac{15}{128}$	4	4	$\frac{9}{32}$	7	1	$\frac{57}{128}$
2	0	$\frac{1}{8}$	4	5	$\frac{37}{128}$	7	2	$\frac{29}{64}$
2	1	$\frac{17}{128}$	4	6	$\frac{19}{64}$	7	3	$\frac{59}{128}$
2	2	$\frac{9}{64}$	4	7	$\frac{39}{128}$	7	4	$\frac{15}{32}$
2	3	$\frac{19}{128}$	5	0	$\frac{5}{16}$	7	5	$\frac{61}{128}$
2	4	$\frac{5}{32}$	5	1	$\frac{41}{128}$	7	6	$\frac{31}{64}$
2	5	$\frac{21}{128}$	5	2	$\frac{21}{64}$	7	7	$\frac{63}{128}$

Suite de la Table des Fractions de la Livre de Poids de Marc.

onces	gros	valeurs	onces	gros	valeurs	onces	gros	valeurs
8	0	$\frac{1}{2}$	10	6	$\frac{43}{64}$	13	4	$\frac{27}{32}$
8	1	$\frac{65}{128}$	10	7	$\frac{87}{128}$	13	5	$\frac{109}{128}$
8	2	$\frac{33}{64}$	11	0	$\frac{11}{16}$	13	6	$\frac{55}{64}$
8	3	$\frac{67}{128}$	11	1	$\frac{89}{128}$	13	7	$\frac{111}{128}$
8	4	$\frac{17}{32}$	11	2	$\frac{45}{64}$	14	0	$\frac{7}{8}$
8	5	$\frac{69}{128}$	11	3	$\frac{91}{128}$	14	1	$\frac{113}{128}$
8	6	$\frac{35}{64}$	11	4	$\frac{23}{32}$	14	2	$\frac{57}{64}$
8	7	$\frac{71}{128}$	11	5	$\frac{93}{128}$	14	3	$\frac{115}{128}$
9	0	$\frac{9}{16}$	11	6	$\frac{47}{64}$	14	4	$\frac{29}{32}$
9	1	$\frac{73}{128}$	11	7	$\frac{95}{128}$	14	5	$\frac{117}{128}$
9	2	$\frac{37}{64}$	12	0	$\frac{3}{4}$	14	6	$\frac{59}{64}$
9	3	$\frac{75}{128}$	12	1	$\frac{97}{128}$	14	7	$\frac{119}{128}$
9	4	$\frac{19}{32}$	12	2	$\frac{49}{64}$	15	0	$\frac{15}{16}$
9	5	$\frac{77}{128}$	12	3	$\frac{99}{128}$	15	1	$\frac{121}{128}$
9	6	$\frac{39}{64}$	12	4	$\frac{25}{32}$	15	2	$\frac{61}{64}$
9	7	$\frac{79}{128}$	12	5	$\frac{101}{128}$	15	3	$\frac{123}{128}$
10	0	$\frac{5}{8}$	12	6	$\frac{51}{64}$	15	4	$\frac{31}{32}$
10	1	$\frac{81}{128}$	12	7	$\frac{103}{128}$	15	5	$\frac{125}{128}$
10	2	$\frac{41}{64}$	13	0	$\frac{13}{16}$	15	6	$\frac{63}{64}$
10	3	$\frac{83}{128}$	13	1	$\frac{105}{128}$	15	7	$\frac{127}{128}$
10	4	$\frac{21}{32}$	13	2	$\frac{53}{64}$	16	0	*l'entier* 1
10	5	$\frac{85}{428}$	13	3	$\frac{107}{128}$			

Table des Fractions de la Livre de Monnoïe.

sols	*den.*	*valeurs*	*sols*	*den.*	*valeurs*	*sols*	*den.*	*valeurs*	*sols*	*den.*	*valeurs*
0	1	1/240	2	7	31/240	5	1	61/240	7	7	91/240
0	2	1/120	2	8	2/15	5	2	31/120	7	8	23/60
0	3	1/80	2	9	33/240	5	3	21/80	7	9	31/80
0	4	1/60	2	10	17/120	5	4	4/15	7	10	47/120
0	5	1/48	2	11	7/48	5	5	13/48	7	11	19/48
0	6	1/40	3	0	3/20	5	6	11/40	8	0	2/5
0	7	7/240	3	1	37/240	5	7	67/240	8	1	97/240
0	8	1/30	3	2	19/120	5	8	17/60	8	2	49/120
0	9	3/80	3	3	39/240	5	9	69/240	8	3	33/80
0	10	1/24	3	4	1/6	5	10	7/24	8	4	5/12
0	11	11/240	3	5	41/240	5	11	71/240	8	5	101/240
1	0	1/20	3	6	7/40	6	0	3/10	8	6	51/120
1	1	13/240	3	7	43/240	6	1	73/240	8	7	103/240
1	2	7/120	3	8	11/60	6	2	37/120	8	8	13/30
1	3	1/16	3	9	3/16	6	3	5/16	8	9	7/16
1	4	1/15	3	10	23/120	6	4	19/60	8	10	53/120
1	5	17/240	3	11	47/240	6	5	77/240	8	11	107/240
1	6	3/40	4	0	1/5	6	6	39/120	9	0	9/20
1	7	10/240	4	1	49/240	6	7	79/240	9	1	109/240
1	8	1/12	4	2	5/24	6	8	1/3	9	2	11/24
1	9	7/80	4	3	51/240	6	9	27/80	9	3	111/240
1	10	11/120	4	4	13/60	6	10	41/120	9	4	7/15
1	11	23/240	4	5	53/240	6	11	83/240	9	5	113/240
2	0	1/10	4	6	9/40	7	0	7/20	9	6	57/120
2	1	5/48	4	7	11/48	7	1	17/48	9	7	23/48
2	2	13/120	4	8	7/30	7	2	43/120	9	8	29/60
2	3	9/80	4	9	57/240	7	3	29/80	9	9	39/80
2	4	7/60	4	10	29/120	7	4	11/30	9	10	59/120
2	5	29/240	4	11	59/240	7	5	89/240	9	11	119/120
2	6	1/8	5	0	1/4	7	6	3/8	10	0	1/2

Suite de la Table des Fractions de la Livre de Monnoïe.

ſols	den.	valeurs	ſols	den.	valeurs	ſols	den.	valeurs	ſols	den.	valeurs
10	1	121/240	12	7	151/240	15	1	181/240	17	7	211/240
10	2	61/120	12	8	19/30	15	2	91/120	17	8	53/60
10	3	41/80	12	9	51/80	15	3	61/80	17	9	71/80
10	4	31/60	12	10	77/120	15	4	23/30	17	10	107/120
10	5	25/48	12	11	31/48	15	5	37/48	17	11	43/48
10	6	63/120	13	0	13/20	15	6	31/40	18	0	9/10
10	7	127/240	13	1	157/240	15	7	187/240	18	1	217/240
10	8	2/15	13	2	79/120	15	8	47/60	18	2	109/120
10	9	43/80	13	3	53/80	15	9	63/80	18	3	73/80
10	10	13/24	13	4	2/3	15	10	19/24	18	4	11/12
10	11	131/240	13	5	161/240	15	11	191/240	18	5	221/240
11	0	11/20	13	6	27/40	16	0	4/5	18	6	37/40
11	1	133/240	13	7	163/240	16	1	193/240	18	7	223/240
11	2	67/120	13	8	41/60	16	2	97/120	18	8	14/15
11	3	9/16	13	9	11/16	16	3	13/16	18	9	15/16
11	4	17/30	13	10	83/120	16	4	49/60	18	10	113/120
11	5	137/240	13	11	167/240	16	5	197/240	18	11	227/240
11	6	23/40	14	0	7/10	16	6	33/40	19	0	19/20
11	7	139/240	14	1	169/240	16	7	199/240	19	1	229/240
11	8	7/12	14	2	17/24	16	8	5/6	19	2	23/24
11	9	47/80	14	3	57/80	16	9	67/80	19	3	77/80
11	10	71/120	14	4	43/60	16	10	101/120	19	4	29/30
11	11	143/240	14	5	173/240	16	11	203/240	19	5	233/240
12	0	3/5	14	6	29/40	17	0	17/20	19	6	39/40
12	1	29/48	14	7	35/48	17	1	41/48	19	7	47/48
12	2	73/120	14	8	11/15	17	2	103/120	19	8	59/60
12	3	49/80	14	9	59/80	17	3	69/80	19	9	79/80
12	4	37/60	14	10	89/120	17	4	13/15	19	10	119/120
12	5	149/240	14	11	179/240	17	5	209/240	19	11	239/240
12	6	5/8	15	0	3/4	17	6	7/8	20 ou l'ent.		1 ou 20/20

DE LA MULTIPLICATION.

145 Nous venons de voir que dans l'addition les quantités composantes & leur somme sont de même nature ; & que dans la soustraction, le soustréande, le soustracteur & la différence sont aussi de la même espece ; ce ne n'est pas la même chose dans la multiplication.

En général on ne peut multiplier un nombre concret que par un nombre abstrait.

Par exemple on ne peut pas multiplier des toises pieds & pouces par des livres sols & deniers ; on multiplie les toises, pieds & pouces par le nombre proposé de livres, de sols & de deniers, c'est-à-dire que le multiplicande étant concret, le multiplicateur est abstrait & le produit est de la même nature que le multiplicande. On peut à la verité multiplier des toises pieds & pouces par des toises pieds & pouces, mais le produit n'est plus de la nature du multiplicande, c'est un composé des deux produisans, qui sera une surface si les deux produisans exprimoient des lignes, & ce produit sera un solide si l'un des deux produisans étant déja une surface, l'autre est une grandeur simple ou d'une dimension. Dans toute autre espece de grandeur, *le multiplicande sera toujours concret, le multiplicateur toujours abstrait, & le produit sera concret & de la nature du multiplicande.* Ainsi si l'on veut savoir combien doivent couter un certain nombre de toises d'ouvrages à tant la toise, le prix d'une toise doit être regardé comme multiplicande, le nombre de toises sera le multiplicateur & le produit sera le prix total du nombre de toises proposé. Cela n'empêche pas que pour la commodité on ne multiplie le plus grand nombre par le plus petit, puisque cela est indifférent, & que le produit est toujours le même ; mais il faut se souvenir que l'un des deux produisans est nécessairement abstrait & le produit concret comme l'autre produisant & de la même nature.

146 Si l'un des deux produisans est un nombre entier, & l'autre une grandeur vulgaire composée d'entiers & de fractions, on multipliera cette grandeur mixte par l'entier de la maniere suivante.

Par exemple, si on demande combien couteront 24^T, 5^P, 8^p, à $45^{\#}$ la toise, on pourra mettre à côté du multiplicateur & du multiplicande des apostilles ou caracteres qui indiquent leur nature, mais on se souviendra qu'on doit multiplier les $45^{\#}$ par 24, $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{72}$, & qu'ainsi ce multiplicateur $24 + \frac{5}{6} + \frac{8}{72}$, doit être regardé comme un nombre abstrait, & que le produit sera du genre de la monnoïe, & contiendra des livres ou des fractions de la livre.

Ainsi multipliant 1°. 45# par 24, nombre abstrait, on écrira à l'ordinaire les deux produits particuliers 180#, 900#, qui en résultent. 2°. Pour avoir le produit de 45 par $\frac{5}{6}$, on multipliera 45# par 5, & le produit 225 qui en résulte étant divisé par le dénominateur 6, donnera 37# + $\frac{3}{6}$#, ou 37# 10ß. 3°. Multipliant enfin 45# par 8, ou plûtôt par $\frac{8}{72} = \frac{1}{9}$, on pourra multiplier réellement 45# par 8, & diviser le produit 360 par 72, ce qui donneroit 5#, ou multiplier ce multiplicande 45 seulement par le numérateur 1 de la fraction $\frac{1}{9} = \frac{8}{72}$, & le diviser ensuite par 9, c'est-à-dire, prendre le neuviéme du multiplicande, & ce neuviéme sera également 5#, ensorte que le produit total sera 1122# 10ß.

45#		
24T	5P	8P
180		
90		
37	10ß	
5		
1122#	10ß	

Cette opération se nomme *Multiplication par les parties aliquotes*.

Exemple II.

Si l'on demande combien doivent rapporter 18 ans, 7 mois, 22 jours, à 1475# par an. On multipliera 1475# par 18, $\frac{7}{12}$, $\frac{22}{360}$, (car dans le calcul ordinaire, on ne suppose l'année que de 12 mois de chacun 30 jours), c'est-à-dire, qu'après avoir multiplié par le nombre entier 18, on multipliera ensuite par 7, & on divisera le produit par 12, enfin aïant multiplié par 22, on divisera le produit par 360.

1475#		
18 *ans*	7 *mois*	22 *jours*
11800		
1475		
860	8ß	4&
90	2	$9\frac{1}{3}$
27500#	11ß	$1\frac{1}{3}$&

```
  1475
     7
 10325 { 12
    72 { 860 5/12, ou 860# 8ß 4&
     5

  1475
    22
  2950
 2950
 32450 { 360
    50 { 90 5/36, ou 90# 2ß 9 1/3&
```

EXEMPLE III.

Si l'on demande le prix de 235℔ 13℥ 6ʒ d'une certaine matiere, à 347# chacune, on multipliera 347# par 235, ensuite par $\frac{13}{16}$, puis par $\frac{6}{128}$, c'est-à-dire, qu'on multipliera par 13 & par 6, divisant le premier produit par 16, & le second par 128.

347#		
235℔	13℥	6ʒ
1735#		
1041		
694		
281	18ß	9ᵭ
16	5	$3\frac{1}{4}$
81843#	4ß	$0\frac{1}{4}$ᵭ

347
13
1041
347
4511 { 16 — $281\frac{15}{16}$, ou 281# 18ß 9ᵭ
131
31
15

347
6
2082 { 128 — $16\frac{34}{128}$, ou 16# 5ß $3\frac{1}{4}$ᵭ
802
34

Mais si les produisans sont tous deux des quantités mixtes, comme la multiplication par les parties aliquotes seroit trop embarrassante, on la fera par réduction de la maniere suivante.

147 1°. On réduira chacune des deux quantités à la plus petite espece qu'elle ait dans la question, ce qui n'est autre chose que réduire le mixte en fraction.

2°. On multipliera l'une par l'autre les deux quantités réduites; c'est-à-dire, qu'on multipliera les numérateurs l'un par l'autre.

3°. On multipliera l'un par l'autre les deux nombres qui marquent comment la plus haute espece de chacun des deux produisans contient la plus petite, ce qui revient à l'opération de multiplier les deux dénominateurs l'un par l'autre.

4°. On divisera le premier produit par le second, cette opération réduira la fraction en entiers.

*

5°. Enfin on évaluera les fractions, & on réduira aux plus ſimples termes celles qui ſeront au-deſſous de la plus baſſe eſpece, & qui ne peuvent par conſéquent s'exprimer en fractions vulgaires.

Par exemple, ſi l'on veut ſavoir le prix de $7^{T}\ 5^{P}\ 8^{p}$, à $9^{\#}\ 15^{ß}\ 6^{d}$ la toiſe, on aura

1°. $9^{\#}\,15^{ß}\,6^{d} = (9^{\#} \times 20 + 15^{ß}) \times 12 + 6^{d} = 195^{ß} \times 12 + 6^{d} = 2346^{d}$;
& $7^{T} + \frac{5}{6} + \frac{8}{72} = \frac{47}{6} \times 12 + \frac{8}{72} = \frac{572}{72}{}^{T} = 572^{P}$.

2°. $2346^{d} \times 572^{P} = 1341912$.

3°. $240 \times 72 = 17280$.

4°. $\frac{1341912}{17280}{}^{\#} = 77^{\#} + \frac{11352}{17280}$.

5°. $11352 \times 20 = 227040$, $\frac{227040}{17280} = 13^{ß} + \frac{2400}{17280}$, ou les $\frac{5}{36}$ d'un ſol,
$2400 \times 12 = 28800$, $\frac{28800}{17280} = 1^{d} + \frac{11520}{17280} = \frac{2}{3}$.

Et le prix total demandé ſera $77^{\#}\ 13^{ß}\ 1\frac{2}{3}{}^{d}$.

Exemple II.

Suppoſons qu'on demande le montant de 7 ans 4 mois 18 jours de rente fonciere, à $4^{\#}\ 17^{ß}\ 6^{d}$ par an. En opérant comme ci-deſſus, on aura

1°. $4^{\#}\ 17^{ß}\ 6^{d} = 1170^{d}$, ou $\frac{1170}{240}{}^{\#}$; 7 ans 4 mois 18 jours $= 7 + \frac{4}{12} + \frac{18}{360} = \frac{2658}{360}$.

2°. $1170^{\#} \times 2658 = 3109860$.

3°. $360 \times 240 = 86400$.

4°. $\frac{3109860}{86400} = 35^{\#} + \frac{85860}{86400}$.

5°. $85860 \times 20 = 1717200$, $\frac{1717200}{86400} = 19^{ß} + \frac{75600}{86400}$;
$75600 \times 12 = 907200$, $\frac{907200}{86400} = 10^{d} + \frac{43200}{86400} = \frac{432}{864} = \frac{1}{2}$.

Le produit cherché ſera $35^{\#}\ 19^{ß}\ 10\frac{1}{2}{}^{d}$.

Exemple III.

Si l'on cherche le prix de 45℔ 10℥ 7ʒ, à $27^{\#}\ 12^{ß}\ 8^{d}$ la livre, en opérant comme dans les exemples précédens, on aura

1°.

1°. $27^{\#}\ 12^{ß}\ 8^{d} = 6632^{d}$, ou $\frac{6632}{240}{}^{\#}$, 45 ℔ $10^{℥}\ 7^{ʒ} = 5847^{ʒ}$, ou $\frac{5847}{128}$ ℔.

2°. $6632 \times 5847 = 38777304$.

3°. $128 \times 240 = 30720$.

4°. $\frac{38777304}{30720} = 1262^{\#} + \frac{8764}{30720}$.

5°. $8764 \times 20 = 175280$; $\frac{175280}{30720} = 5^{ß} + \frac{21680}{30720}$: $21680 \times 12 = 260160$, $\frac{260160}{30720} = 8^{d} + \frac{14400}{30720}$, ou $\frac{15}{32}$.

Enſorte que le produit eſt $1262^{\#}\ 5^{ß}\ 8\frac{15}{32}{}^{d}$.

DE LA DIVISION.

Dans toute diviſion *ſi le dividende eſt un nombre concret, le diviſeur eſt un nombre abſtrait, & le quotient eſt toujours de la nature du dividende.* Lorſqu'il s'agira d'étendue le dividende & le diviſeur peuvent être tous deux concrets, & le quotient ſera encore concret : par exemple, ſi l'on diviſe la valeur d'un ſolide par ſa ſurface, le quotient en exprimera l'épaiſſeur, ou ſi l'on diviſe par une de ſes dimenſions, la ſurface ſera le quotient. Si l'on diviſe une ſurface par ſa longueur ou ſa largeur, le quotient ſera la largeur ou la longueur de la même partie d'étendue. Dans toute autre ſorte de grandeur, le diviſeur eſt toujours un nombre abſtrait.

148 Pour diviſer un dividende compoſé d'entiers & de fractions vulgaires par un diviſeur entier, on pourra faire la diviſion comme il ſuit.

Par exemple, on demande le prix de la toiſe d'ouvrage dont 57 toiſes ont couté $466^{\#}\ 13^{ß}\ 4^{d}$, le dividende étant du genre de la monnoïe, & le diviſeur entier 57 abſtrait, le quotient ſera du même genre que le multiplicande. 1°. On diviſera 466 par 57, & l'on aura $8^{\#} + \frac{10}{57}$. 2°. On multipliera le reſte 10 par 20, nombre de ſols contenus dans la livre, & au produit 200, on ajoutera le nombre 13 qui eſt celui des ſols de la queſtion, & diviſant la ſomme 213 par 57, on aura $\frac{3}{20}$ de la livre, ou $3^{ß} + \frac{42}{57}$. 3°. Enfin multipliant le reſte 42 par 12 nombre des deniers contenus dans

un ſol, & au produit 504 ajoutant les 4 deniers reſtans, on diviſera la ſomme 508 par 57, & on aura au quotient $8^{d} + \frac{52}{57}$.

$$466 \left\{ \frac{57}{8^{\#}} \right. \quad 10 \qquad\qquad 213 \left\{ \frac{57}{3^{ſ}} \right. \quad 42 \qquad\qquad 508 \left\{ \frac{57}{8\frac{52}{57}^{d}} \right. \quad 52$$

Enſorte que le prix de la toiſe ſera $8^{\#}\ 3^{ſ}\ 8^{d} + \frac{52}{57}$ de denier.

Exemple II.

On demande combien coute la livre d'une matiere dont 48 livres ont couté $1258^{\#}\ 15^{ſ}\ 8^{d}$, on aura en opérant comme ci-deſſus, $\frac{1258^{\#}}{48} = 26^{\#} + \frac{10}{48}$, $10 \times 20 + 15 = 215$, $\frac{215^{ſ}}{48} = 4^{ſ} + \frac{23}{48}$, $23 \times 12 + 8 = 284$, & $\frac{284^{d}}{48} = 5^{d} + \frac{44}{48}$ ou $\frac{11}{12}$; & par conſéquent le prix d'une livre ou le quotient demandé ſera $26^{\#}\ 4^{ſ}\ 5^{d} + \frac{11}{12}$ de denier.

$$1258^{\#} \left\{ \frac{48}{26^{\#}} \right. \quad 298 \quad 10 \qquad\qquad 215^{ſ} \left\{ \frac{48}{4^{ſ}} \right. \quad 23 \qquad\qquad 284^{d} \left\{ \frac{48}{5^{d} + \frac{44}{48} \left(= \frac{11}{12}\right)} \right. \quad 44$$

Exemple III.

Si 24 années ont rapporté $1856^{\#}\ 16^{ſ}\ 8^{d}$, on demande quel eſt le revenu d'une année.

$$1856^{\#} \left\{ \frac{24}{77^{\#}} \right. \quad 176 \quad 8 \qquad\qquad 176^{ſ} \left\{ \frac{24}{7^{ſ}} \right. \quad 8 \qquad\qquad 104^{d} \left\{ \frac{24}{4^{d} + \frac{8}{24} \text{ ou } \frac{1}{3}} \right. \quad 8$$

On trouvera $77^{\#}\ 7^{ſ}\ 4\frac{1}{3}^{d}$ pour le montant de chaque année.

Mais ſi le diviſeur eſt une quantité mixte, ſoit que le dividende ſoit auſſi un mixte ou qu'il ſoit un entier, on ne pourra faire la diviſion que par réduction : pour cela

149 1°. On réduira chacune des deux quantités à la plus petite eſpece qu'elle ait dans la queſtion : ce qui revient à la réduction des mixtes en fractions.

2°. On multipliera le dividende ainſi réduit par le nombre qui marque combien de fois la plus haute eſpece du diviſeur contient

la plus petite qu'elle ait dans la question : c'est-à-dire, qu'on multipliera le numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviſeur.

3°. On multipliera le diviſeur réduit par le nombre qui marque comment la plus haute eſpece du dividende contient la plus petite propoſée : par cette opération on multipliera le numérateur de la fraction diviſeur par le dénominateur de la fraction dividende.

4°. On diviſera le premier produit par le ſecond, ce qui réduira la fraction en entiers.

5°. Enfin on évaluera les fractions, & on réduira aux plus ſimples termes celles qui ſeront au-deſſous de la plus baſſe eſpece du quotient.

Par exemple, ſuppoſant que 5 toiſes 4 pieds 7 pouces aïent couté $127^{\#}\ 15^{ß}\ 8^{d}$, on demande le prix de la toiſe, on aura

1°. Le dividende $127^{\#}\ 15^{ß}\ 8^{d}$, réduit en deniers $= 30668^{d}$, ou $\frac{30668^{\#}}{240}$: & le diviſeur $5 + \frac{4}{6} + \frac{7}{72} = \frac{415}{72}$ toiſes ou 415 pouces.

2°. $30668 \times 72 = 2208096$.

3°. $415 \times 240 = 99600$.

4°. $\frac{2208096}{99600} = 22^{\#} + \frac{16896}{99600}$.

5°. $16896 \times 20 = 337920$, $\frac{337920}{99600} = 3^{ß} + \frac{39120}{99600}$;
$39120 \times 12 = 469440$, $\frac{469440}{99600} = 4^{d} + \frac{71040}{99600}$ $(= \frac{296}{415})$.

On trouvera donc $22^{\#}\ 3^{ß}\ 4^{d} + \frac{296}{415}$.

EXEMPLE II.

Si 54 ℔ 11 ℥ 6 ʒ, ont couté $486^{\#}\ 17^{ß}\ 6^{d}$, combien coute chaque livre ? Opérant comme ci-deſſus, on aura

1°. $486^{\#}\ 17^{ß}\ 6^{d} = 116850^{d}$, ou $\frac{116850^{\#}}{240}$, & $54 + \frac{11}{16} + \frac{6}{128} = \frac{7006}{128}$.

2°. $116850 \times 128 = 14956800$.

3°. $7006 \times 240 = 1681440$.

4°. $\frac{14956800}{1681440} = 8^{\#} + \frac{1505280}{1681440}$.

5°. On évaluera cette fraction à l'ordinaire :
$1505280 \times 20 = 30105600$, $\frac{30105600}{1681440} = 17^{ß} + \frac{1521120}{1681440}$;
$1521120 \times 12 = 18253440$, $\frac{18253440}{1681440} = 10^{d} + \frac{1439040}{1681440}$ ou $\frac{2998}{3503}$.

Le quotient ſera donc $8^{\#}\ 17^{ß}\ 10^{d} + \frac{2998}{3503}$.

On pourra pour s'exercer se proposer à soi-même des exemples d'opérations semblables, & l'on trouvera quelques abréviations fort simples, & en même tems très-commodes.

On voit que les démonstrations qu'on pourroit donner de ces différentes opérations, seroient les mêmes que celles que nous avons vues ci-dessus dans le calcul des fractions génériques.

Nous expliquerons à la fin de l'article suivant, une méthode beaucoup plus courte & aussi sure pour multiplier & diviser ces sortes de quantités.

III.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

150 Nous avons vu (29), qu'on appelloit *nombre décimal* tout nombre composé de l'unité suivie d'un ou de plusieurs zéros, comme 10, 100, 1000, 10000, &c. nous avons aussi vu qu'une fraction tiroit son nom de son dénominateur (85), ainsi une fraction qui aura pour dénominateur un nombre décimal, s'appellera une *fraction décimale.*

On a donné aux différentes fractions décimales, différens noms qui dépendent du nombre de zéros mis ou supposés à leurs dénominateurs, on s'est aussi servi de différentes expressions pour les représenter; mais la maniere la plus suivie & la plus simple, & par conséquent la meilleure, est de les écrire à la suite de leurs entiers dont on les sépare par un point sans aucune autre différence entre ces nombres & les entiers qui les précédent.

Ainsi $4.6 = 4 + \frac{6}{10}$, $4.63 = 4 + \frac{63}{100}$, $4.637 = 4 + \frac{637}{1000}$.

Ensorte que le point qui sépare ces fractions des entiers représentant l'unité qui est ou est supposée être le premier chiffre du dénominateur, on la suppose suivie d'autant de zéros que le point est suivi de chiffres.

Il est clair que cette hipothèse ne change en rien la nature du calcul, puisque l'unité diviseur ne fait aucun changement sur le dividende, & que d'ailleurs, cette convention n'est qu'une suite de la numération; car par cette méthode chaque chiffre est toujours décuple du même chiffre placé à sa droite, & n'est au contraire que la dixiéme partie du chiffre semblable placé à sa gauche.

Ainsi le premier chiffre à la droite après le point représente des dixiémes, le suivant exprime des centiémes, le troisiéme vaut des milliémes, &c.

151 L'utilité de ce calcul, consiste en ce que sans changer en rien l'ordre arithmétique, on réduit les fractions au calcul des entiers.

Il seroit à desirer pour la commodité du commerce qu'on voulut admettre cette division décimale : par exemple, une mesure fixée comme la toise pourroit se diviser en dix parties qu'on appelleroit pieds, le pied en dix parties qu'on nommeroit pouces, & le pouce en dix parties qu'on pourroit nommer lignes, la ligne en dix points, &c. ensorte que dans cette nouvelle hipothèse, la toise vaudroit 10000 points, ou 1000 lignes, ou 100 pouces ou 10 pieds.

Le millier se divise naturellement en dix quintaux, le quintal pourroit se diviser en dix parties auxquelles on donneroit un nom particulier, chacune de ces parties en dix autres qu'on appelleroit livres, chaque livre en dix onces, l'once en dix gros, le gros en dix dragmes, & la dragme en dix grains : par cette division la livre contiendroit 10000 grains, ou 1000 dragmes, ou 100 gros, ou 10 onces.

Dans la monnoïe, la pistole est déja divisée en dix livres, & si l'on prenoit la pistole pour terme moïen de comparaison ou pour unité principale dans ce genre, la livre pourroit être divisée en dix parties qu'on appelleroit sols, le sol en dix deniers, le denier en dix parties qu'on pourroit appeller pites ou oboles, &c. par ce moïen la pistole contiendroit 10 livres, ou 100 sols, ou 1000 deniers, ou 10000 oboles.

On pourroit de même introduire cette division dans toutes les autres mesures usitées dans le commerce, & si cette division étoit admise, il ne seroit plus question de fractions, puisqu'elles seroient réduites au calcul des entiers.

Dans le calcul de la durée seulement ce changement ne seroit pas avantageux, parce que la division de cette espece de grandeur étant fondée sur l'ordre naturel des tems, on ne pourroit varier cette division sans mettre de la confusion dans ce calcul.

Pour réduire en fraction décimale une fraction quelconque, il faut distinguer si la fraction à réduire est générique ou vulgaire.

152 Si l'on veut réduire une fraction générique en décimale, il faut multiplier le numérateur de la fraction générique par le dénominateur de la décimale à laquelle on veut la réduire, & divisant le produit par le dénominateur de la générique, faire du quotient le numérateur de la décimale.

On voit aſſez qu'on multipliera un nombre quelconque par le dénominateur d'une fraction décimale, en mettant après ce nombre autant de zéros qu'il y en a après l'unité dans le dénominateur de la décimale.

Ainſi pour réduire la fraction $\frac{1}{5}$ en décimale dont le dénominateur ſoit 1000, on multipliera le numérateur 1 par 1000, & on diviſera le produit 1000 par le dénominateur 5, ce qui donnera $\frac{1000}{5} = 0.\frac{200}{1000}$, ou 0. 200 ; car il faut repréſenter l'entier qui manque par un zero qui en tienne la place & qui précede le point.

De même $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, réduits en milliémes, deviendront $\frac{3.000}{5}$, $\frac{2.000}{3}$, $\frac{7000}{8}$.
ou 0.600 ; 0.666 ; 0.875.

La premiere fraction 0.600, & la troiſiéme 0.875, ſont exactement égales aux fractions $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$; mais la ſeconde 0.666, eſt moindre que la fraction générique $\frac{2}{3}$ de la quantité $\frac{2}{3000} = \frac{1}{1500}$ qu'on peut négliger à cauſe de ſa petiteſſe.

153 Pour réduire une fraction vulgaire en fraction décimale, il faut laiſſer l'entier tel qu'il eſt s'il y en a un, réduire les fractions vulgaires à la plus petite eſpece qu'elles aïent dans la queſtion, & enſuite opérer comme pour la réduction d'une fraction générique, c'eſt-à-dire, multiplier le numérateur de la fraction à réduire par le dénominateur de la décimale à laquelle on veut la réduire, & diviſer le produit par le dénominateur de la fraction vulgaire, ou par le nombre qui marque comment la plus petite eſpece du genre que l'on conſidere eſt contenue dans la plus grande du même genre.

Ainſi la quantité $2^{\#}\ 15^{ſ}\ 6^{d} = 2^{\#} + \frac{186}{240} = 2.\frac{186.000}{240} = 2.775^{\#}$.

$3^{T}\ 4^{P}\ 8^{p} = 3^{T} + \frac{56}{72} = 3.\frac{56.000}{72} = 3.777^{T} + \frac{76}{72000} = \frac{7}{9000}$ qu'on peut négliger à cauſe de ſa petiteſſe.

De même 7℔ 12℥ 5ʒ $=$ 7℔ $+ \frac{101}{128} = 7.\frac{101.000}{128} = 7.789$℔ $+ \frac{8}{128000}$ ou $\frac{1}{16000}$ qu'on négligera auſſi.

Nous n'avons ſuppoſé dans ces réductions d'autre dénominateur que 1000, quoiqu'on puiſſe en ſuppoſer tel autre plus grand qu'on

voudra; par exemple, 10000, 100000, 1000000, &c. mais comme en réduisant ainsi on ne peut avoir d'erreur $= \frac{1}{1000}$ de l'unité principale, on néglige volontiers une erreur semblable dans des objets qui ne sont pas fort importans: au contraire s'il en étoit besoin, on pousseroit la division aussi loin qu'on voudroit, & on rendroit toujours l'erreur plus petite. Car on ne change point la valeur d'une quantité quelconque fractionnaire ou supposée telle en multipliant également son numérateur & son dénominateur (103).

Par des opérations contraires on réduira des fractions décimales en fractions génériques ou vulgaires.

154 On réduira une fraction décimale en fraction générique en multipliant le numérateur de la décimale par le dénominateur de la générique à laquelle on veut la réduire, & divisant le produit par le dénominateur de la décimale; c'est-à-dire, en retranchant du produit autant de chiffres que le dénominateur de la décimale est supposé avoir de zeros, & négligeant le surplus, s'il y en a.

Par exemple, pour réduire 0.56 à une fraction qui ait 8 pour dénominateur, on multipliera 56 par 8, & on divisera le produit 448 par 100, c'est-à-dire, qu'on effacera les deux derniers chiffres 48, & la fraction $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ sera la fraction réduite.

Si le dénominateur de la fraction générique n'est pas déterminé, on divisera la décimale & son dénominateur supposé par leur plus grand commun diviseur; & le quotient sera la fraction générique démandée: ainsi la fraction 0.56 étant $= \frac{56}{100}$ deviendra $\frac{14}{25}$.

155 On réduira une fraction décimale en fraction vulgaire en laissant l'entier tel qu'il est, s'il y en a un, & multipliant le numérateur de la décimale par le nombre qui marque comment la plus haute espece du genre dont il s'agit, contient la plus petite en question, on divisera le produit par le dénominateur de la décimale.

Par exemple, on demande la valeur de 0.746^T; pour la trouver, on multipliera 746 par 864, nombre des lignes de la toise, & on divisera le produit 644544 par 1000 en retranchant les trois derniers chiffres, & le reste 644 sera $\frac{644}{864}$ ou 644 lignes qui étant évaluées donneront 4^P 5^P 8^L.

En pareil cas lorsque le premier chiffre qu'on retranche est plus grand que 5, ou que les deux premiers sont plus grands que 50, en les retranchant, on ajoute une unité au dernier chiffre qui précede

ceux qu'on retranche, parce que retranchant un chiffre plus grand que 5, on retranche plus d'un demi, & par conséquent, il s'en faut moins qu'un demi que ce qu'on retranche ne soit égal à une unité. Donc en retranchant ces chiffres qui valent plus que $\frac{1}{2}$, on doit ajouter 1 au chiffre qui les précede, & cet excès étant moins considerable que le défaut qu'occasionneroit le retranchement de ces chiffres, l'erreur est aussi moins considerable, & le résultat est plus approchant de la vérité.

Les fractions décimales sont fort commodes étant réduites en tables : les plus néceſſaires & celles dont l'usage est le plus fréquent sont celles des parties décimales de la toise, du pied, de la livre de pesanteur, & de la livre de monnoïe.

156 Pour construire ces tables, on suppose l'unité dont il s'agit divisée par exemple, en 1000 parties, & on cherche combien chaque partie vulgaire contient de ces parties décimales : quand il reste quelque chose d'une division, on le néglige s'il est moindre que la moitié du diviseur, mais quand ce reste est plus grand que la moitié du diviseur, on augmente le quotient d'une unité pour avoir une valeur plus approchante de la vraïe. Ainsi dans une table de fractions décimales dont le dénominateur supposé sera 1000, il ne peut y avoir $\frac{1}{1000}$ d'erreur au-dessus ou au-dessous de la véritable valeur.

La premiere des tables suivantes est faite pour la perche de 18 pieds telle que celle dont on se sert à Paris & aux environs divisée en 1000 parties, elle n'est poussée que jusqu'aux quarts de pied ; car dans ces sortes de mesurages on ne passe guere les demi-pieds, & c'est être bien exact que d'aller jusqu'aux quarts de pied. Cette table peut servir pour l'arpentage.

La seconde contient tous les pieds & les pouces de la toise réduits en milliémes parties de la toise. Elle peut servir pour le toisé, en supposant les toises pour les entiers, on prend dans la table le nombre qui convient aux pieds & aux pouces en y ajoutant pour les lignes, s'il y en a, les nombres de la petite table des 12 lignes du pouce réduites en milliémes de la toise.

La troisiéme qui contient les parties décimales du pied divisé en 1000 parties, est utile pour les petits toisés comme ceux des lambris, de la menuiserie, des couvertures de maisons, des plafonds, des bois équarés, &c. dans lesquels on ne compte ordinairement que par pieds, pouces & lignes. Ainsi dans ces sortes de toisés, on prend pour entiers le nombre de pieds, on cherche dans la table la partie décimale qui répond au nombre de pouces & de lignes trouvé par le calcul,

calcul, & on l'ajoute après les entiers dont on la ſépare par un point. On peut auſſi s'en ſervir pour les ſolides, lorſqu'on ne comptera que par pieds, pouces & lignes.

La quatriéme eſt pour les parties de la livre de 16 onces qu'on ſuppoſe auſſi diviſée en 1000 parties. On s'en ſervira comme des autres pour éviter la multiplication & la diviſion par réduction.

Enfin, la cinquiéme de ces tables contient la livre de monnoïe diviſée en 1000 parties; elle ſert particuliérement pour éviter les parties aliquotes ou la réduction dans la multiplication & la diviſion. Ainſi prenant les livres pour les entiers, & mettant un point après elles, on écrira à leur ſuite la partie décimale qui conviendra au nombre de ſols & de deniers dont il ſera queſtion.

Table des parties décimales de la Perche de 18 pieds.

Pieds	Pouces 0	3	6	9
0	000	014	028	042
1	056	069	083	097
2	111	125	139	153
3	167	181	194	208
4	222	236	250	264
5	278	292	306	319
6	333	347	361	375
7	389	403	417	431
8	444	458	472	486
9	500	514	528	542
10	556	569	583	597
11	611	625	639	653
12	667	681	694	708
13	722	736	750	764
14	778	792	806	819
15	833	847	861	875
16	889	903	917	931
17	944	958	972	986

Table des Parties décimales de la Toise.

	Pieds					
Pouces	0	1	2	3	4	5
0	000	167	333	500	667	833
1	014	181	347	514	681	847
2	028	194	361	528	694	861
3	042	208	375	542	708	875
4	056	222	389	556	722	889
5	069	236	403	569	736	903
6	083	250	417	583	750	917
7	097	264	431	597	764	931
8	111	278	444	611	778	944
9	125	292	458	625	792	958
10	139	306	472	639	806	972
11	153	319	486	653	819	986

Les douze Lignes du Pouce en parties décimales de la Toise.

Lignes	Parties
1	001
2	002
3	003
4	005
5	006
6	007
7	008
8	009
9	010
10	012
11	013
12	014

Table des parties décimales du Pied.

	Pouces											
Lignes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	000	083	167	250	333	417	500	583	667	750	833	917
1	007	090	174	257	340	424	507	590	674	757	840	924
2	014	097	181	264	347	431	514	197	681	764	847	931
3	021	104	188	271	354	437	521	604	687	771	854	937
4	028	111	194	278	361	444	528	611	694	778	861	944
5	035	118	201	285	368	451	535	618	701	785	868	951
6	042	125	208	292	375	458	542	625	708	792	875	958
7	049	132	215	299	382	465	549	632	715	799	883	965
8	056	139	222	306	389	472	556	639	722	806	889	972
9	062	146	229	313	396	479	562	646	729	812	896	979
10	069	153	236	319	403	486	569	653	736	819	903	986
11	076	160	243	326	410	493	576	660	743	826	910	993

Table des Parties décimales de la Livre pesant.

Onces	Gros 0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	8	16	23	31	39	47	55
1	62	70	78	86	94	101	109	117
2	125	133	141	148	156	164	172	180
3	187	195	203	211	219	226	234	242
4	250	258	266	273	281	289	297	305
5	312	320	328	336	344	351	359	367
6	375	383	391	398	406	414	422	430
7	437	445	453	461	469	476	484	492
8	500	508	516	523	531	539	547	555
9	562	570	578	586	594	601	609	617
10	625	633	641	648	656	664	672	680
11	687	695	703	711	719	726	734	742
12	750	758	766	773	781	789	797	805
13	812	820	828	836	844	851	859	867
14	875	883	891	898	906	914	922	930
15	937	945	953	961	969	976	984	992

Table des Parties décimales de la Livre de Monnoïe.

Sols	Deniers 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	000	004	008	012	017	021	025	029	033	037	042	046
1	050	054	058	062	067	071	075	079	083	087	092	096
2	100	104	108	112	117	121	125	129	133	137	142	146
3	150	154	158	162	167	171	175	179	183	187	192	196
4	200	204	208	212	217	221	225	229	233	237	242	246
5	250	254	258	262	267	271	275	279	283	287	292	296
6	300	304	308	312	317	321	325	329	333	337	342	346
7	350	354	358	362	367	371	375	379	383	387	392	396
8	400	404	408	412	417	421	425	429	433	437	442	446
9	450	454	458	462	467	471	475	479	483	487	492	496
10	500	504	508	512	517	521	525	529	533	537	542	546
11	550	554	558	562	567	571	575	579	583	587	592	596
12	600	604	608	612	617	621	625	629	633	637	642	646
13	650	654	658	662	667	671	675	679	683	687	692	696
14	700	704	708	712	717	721	725	729	733	737	742	746
15	750	754	758	762	767	771	775	779	783	787	792	796
16	800	804	808	812	817	821	825	829	833	837	842	846
17	850	854	858	862	867	871	875	879	883	887	892	896
18	900	904	908	912	917	921	925	929	933	937	942	946
19	950	954	958	962	967	971	975	979	983	987	992	996

Les fractions décimales ſe calculent comme les entiers numériques en faiſant ſeulement attention à ne point confondre les quantités entieres qui précedent le point, avec les fractions décimales qui le ſuivent : pour cet effet il faut faire quelques obſervations que nous donnerons en y appliquant les opérations de l'Arithmétique.

DE L'ADDITION.

157 Pour ajouter ensemble tant de fractions décimales qu'on voudra, qui auront plus ou moins de chiffres décimaux les unes que les autres & précedées d'entiers ou sans entiers, on posera ces nombres les uns sous les autres, ensorte que tous les points soient dans une même colomne, & représentant par un zero les entiers qui manquent, on fera ensuite l'addition à l'ordinaire (18), & dans la somme, on posera le point de sorte qu'il soit suivi d'autant de chiffres qu'il y en a dans la partie décimale qui en contient davantage.

13.45607
0.57
17.00777
8.5896
5.987
4.34
0.98945
0.001
―――――
50.94089

DE LA SOUSTRACTION.

158 Pour soustraire une fraction décimale d'une autre fraction décimale plus grande ou d'un entier, on écrira l'une sous l'autre ces deux quantités en plaçant dans la même colomne les points qui séparent les entiers d'avec les fractions, & après avoir soustrait la plus petite quantité de la plus grande (20), on mettra dans la différence qui en résultera, le point de maniere qu'il y ait après lui autant de chiffres qu'il y en a dans le soustréande : car s'il y en a davantage à l'une des deux grandeurs sur lesquelles on opere, c'est nécessairement au soustréande auquel on ajoute autant de zeros qu'il en faut pour en pouvoir retrancher le soustracteur.

4.5078901	8.45793	5.000000
2.8753234	0.57901	4.875321
1.6325667	7.87892	0.124679

DE LA MULTIPLICATION.

159 Pour multiplier l'une par l'autre deux fractions décimales, ou une quantité entiere par une fraction décimale, on multipliera ces deux quantités l'une par l'autre (26) comme s'il n'y avoit point de décimales, & dans le produit qui en réſultera on placera le point qui doit ſéparer les entiers des fractions, enſorte qu'il ſoit ſuivi d'autant de chiffres décimaux, qu'il y en a, & dans le multiplicande & dans le multiplicateur; c'eſt-à-dire, (pour s'exprimer généralement) que s'il y a dans le multiplicande un nombre m de chiffres décimaux, & qu'il y en ait un nombre n dans le multiplicateur, le produit en aura un nombre $= m + n$.

La raiſon en eſt ſimple. Nous avons vû (30) qu'une quantité ſuivie de deux chiffres multipliée par une quantité ſuivie de deux chiffres donnoit un produit ſuivi de quatre chiffres : ainſi les entiers qui précedent les décimaux, ou qui ſont ſuppoſés les précéder, doivent être ſuivis d'autant de décimaux que le multiplicande & le multiplicateur en ont enſemble.

41.067	0.487	45.
2.03	0.952	0.12
123201	974	90
821340	2435	45
83.36601	4383	5.40
	0.463624	

DE LA DIVISION.

160 Pour diviſer un entier par une fraction décimale, ou deux fractions décimales l'une par l'autre, on diviſera à l'ordinaire (39) ſans s'embaraſſer du point qui ſépare les entiers des décimaux, & après la diviſion on placera ce point dans le quotient enſorte qu'il n'y ait de chiffres décimaux après lui qu'autant qu'il y en a dans le dividende moins le nombre de ceux du diviſeur : ainſi ſi le dividende a un nombre m de chiffres décimaux, & le diviſeur un nombre n, le quotient en aura un nombre $= m - n$.

Par conséquent le quotient ne contiendra que des entiers quand le dividende & le diviseur auront autant de décimaux l'un que l'autre.

Lorsque le diviseur en aura plus que le dividende, le quotient aura plus d'entiers que le dividende, c'est-à-dire, sera plus grand que le dividende : par exemple, 96 entiers divisés par 0.12 sera 800 : car $\frac{96}{12} = 8$. Mais 96 divisés par $\frac{12}{100}$ sera cent fois aussi grand, & sera par conséquent 800. D'ailleurs $96 = 96.00$, &c. & $\frac{96.00}{0.12} = 800$.

Dividende	Diviseur / Quotient		Dividende	Diviseur / Quotient
406.58112	45.632		186624	8.64
46.5251	8.91		1382	216
45632			5184	

Dividende	Diviseur / Quotient
96.000000	0.12
	800.0000

On voit dans le dernier exemple que les zeros qui suivent les entiers dans le dividende & dans le quotient sont inutils, & que quand il n'y en auroit aucun dans le dividende, le quotient n'en seroit pas moins 800, puisque 96 contiennent 800 fois $\frac{12}{100}$; & ceux qui suivent les entiers dans le diviseur ne l'augmentent pas plus que les premiers n'augmentent le dividende.

161 On se sert particuliérement des décimales pour approcher autant qu'on le veut de la valeur exacte du quotient d'une division imparfaite, lorsqu'on ne veut pas mettre le reste en fraction. Pour cela on ajoute au dividende autant de zeros qu'on veut, & laissant subsister le diviseur tel qu'il est, on continue la division à l'ordinaire & comptant dans le quotient autant de chiffres vers la droite qu'on a ajouté de zeros au dividende, on les sépare par un point de ceux qui les précédent & qui représentent les entiers.

Par exemple, si aïant divisé 4096 par 124 on a trouvé pour quotient $33\frac{4}{124}$, on pourra mettre après le dividende 4096 autant de zeros qu'on voudra, & continuer à diviser par le même diviseur 124 : en mettant dans le quotient après l'entier 33, un point qui sépare ce nombre de ceux qui le suivront, & qui seront en nombre pareil à celui des zeros ajoutés au dividende, puisqu'à chaque fois qu'on descendra un chiffre vis-à-vis du reste de la précédente

division particuliére, on aura un nouveau dividende particulier, & par conséquent un nouveau chiffre au quotient.

```
4096.0000 { 124
376       { 33.0322, ou 33.0323
  4.00
   280
    320
     72
```

On peut pousser cette approximation aussi loin qu'on le veut; mais comme l'erreur de $\frac{1}{1000}$ ou de $\frac{1}{10000}$ est fort peu de chose, & que l'on peut négliger une semblable erreur, on se contente ordinairement des deux ou trois premiers chiffres décimaux, en ajoutant une unité au dernier de ces chiffres lorsque le dernier reste est plus grand que la moitié du diviseur, ce qui rend l'erreur encore plus petite de moitié.

162 Souvent il est impossible de trouver un quotient exact, quelque loin qu'on pousse la division, par exemple, si l'on vouloit diviser 40 par 7, quelque nombre de zeros qu'on ajoutât après le dividende 40., on ne parviendroit jamais à un quotient sans reste; si l'on y ajoutoit six zeros on auroit pour quotient 5.71428., si l'on en ajoutoit douze, on auroit 5.714285714 28, ensorte qu'on verroit toujours revenir au quotient les mêmes chiffres 571428 & dans le même ordre; c'est à cette répétition des mêmes chiffres qu'on reconnoît principalement que la premiere fraction ou le premier reste $\frac{5}{7}$ ne pourra jamais être exactement réduit en fractions décimales.

Les démonstrations de ce calcul seront les mêmes que celles des fractions génériques (de 120 à 136).

Remarque.

Nous avons vû (147. 149.), qu'il étoit embarrassant de multiplier & de diviser des quantités composés d'entiers & de fractions vulgaires par d'autres quantités qui contiennent pareillement des fractions vulgaires. La méthode de réduction qu'on emploïe alors jette dans un calcul assez long qu'il est naturel d'éviter autant qu'il est possible. Il

Il sera bien plus commode d'appliquer à cet usage les fractions décimales qui réduiront ces opérations au calcul des entiers. Nous allons exposer la maniere de faire ces opérations.

163 Pour multiplier l'une par l'autre deux quantités composées d'entiers & de fractions vulgaires, ou dont l'une seulement contient des entiers ou dont toutes deux sont fractionnaires. S'il y a des entiers on les laissera subsister tels qu'ils sont, on prendra dans les tables des parties décimales, les nombres qui répondent aux fractions, & on opérera sur ces quantités réunies, comme on a vû ci-devant (159).

Par exemple, on demande combien doivent couter $453^{T}\ 5^{P}\ 7^{P}$ d'un certain ouvrage à $62^{tt}\ 14^{ſ}\ 8^{d}$ la toise.

Cherchant dans la table des parties décimales de la toise, on trouvera que 5 pieds 7 pouces = 0.931; l'un des produisans sera donc 453.931.

De même on trouvera dans la table des parties décimales de la livre de monnoïe, que $14^{ſ}\ 8^{d}$ = 0.733. Ce produisant sera donc 62.733.

On multipliera à l'ordinaire	453.931
Par	62.733
	1361793
	1361793
	3177517
	907862
	2723586
Et dans le produit	28476.453423 on mettra le point

avant les six derniers chiffres, parce que chacun des deux produisans a trois chiffres décimaux, & on aura pour entiers le produit 28476^{tt} qui précede le point.

A l'égard du nombre 0.453423 qui suit le point, & qui vaut $\frac{453423}{1000000}$ en divisant par 1000, le numérateur & le dénominateur de cette fraction, on n'en changera pas la valeur; c'est-à-dire, qu'en supprimant les trois derniers chiffres de part & d'autre, on aura $\frac{453}{1000} = \frac{453423}{1000000}$ parce qu'on néglige $\frac{423}{1000000}$ qui vaut moins que $\frac{1}{1000}$. Mais $\frac{453}{1000}$ = 0.453. On cherchera donc dans la table

des parties décimales de la livre de monnoïe, quelle est la fraction qui correspond à 453 : on trouvera $9^{ſ}$ 1^{d} qu'on ajoutera aux entiers, & la somme $28476^{\#}$ $9^{ſ}$ 1^{d} sera le produit total demandé.

C'est-à-dire que l'on supprimera autant de chiffres décimaux qu'en contenoit le produisant abstrait, & qu'on comparera les premiers qui restent avec la table des parties décimales concretes de même nature que le produit, pour en avoir la valeur. Dans cet exemple le produit devoit donner des livres, sols & deniers. Par conséquent le produisant abstrait étoit le nombre de toises, de pieds, & de pouces. Or la fraction qui exprimoit le nombre de pieds & de pouces, contenoit les trois chiffres décimaux 931 : pour avoir en fractions de la livre de monnoïe la valeur de la fraction 0.453423 que donne le produit, on a donc dû supprimer les trois derniers chiffres 423 qui valent beaucoup moins qu'un denier, & prendre dans la table des parties décimales de la livre de monnoïe, la fraction vulgaire qui répond à 0.453.

De même si l'on veut savoir combien couteroient 215 livres, 7 onces, 6 gros d'une certaine matiere à $102^{\#}$ $12^{ſ}$ 6^{d}, la livre pesant, on laissera les entiers tels qu'ils sont, & prenant dans les tables des parties décimales les fractions qui répondent à 7 onces 6 gros, & à $12^{ſ}$ 6^{d}, on les ajoutera à leurs entiers, & on multipliera à l'ordinaire. Après quoi l'on mettra le point qui doit séparer les entiers des fractions avant les six derniers chiffres du produit, on cherchera dans la table des parties décimales de la livre de monnoïe la valeur des trois premiers, & on ajoutera cette valeur aux entiers du produit.

On multipliera donc	215.484
Par	102.625
	1077420
	430968
	1292904
	430968
	2154840
Et le produit	22114.045500 sera $22114^{\#}$ $0^{ſ}$ 11^{d}

164 Pour diviser l'une par l'autre deux quantités qui contiennent des fractions vulgaires, on mettra à la suite de chacune les nom-

bres décimaux qui répondent à ces fractions, & s'il y a autant de chiffres décimaux dans chacune ; c'est-à-dire, si de part & d'autre l'entier est divisé dans un même nombre de parties (comme dans les tables précédentes où l'entier est divisé en 1000 parties), le quotient ne contiendra que des entiers.

S'il reste quelque chose de cette division, on multipliera ce reste par le nombre qui marque combien de fois une unité des entiers du quotient contient une unité de l'espece immédiate, on divisera le produit par le même diviseur, & le quotient donnera des unités de cette espece immédiate.

S'il reste encore quelque chose, on multipliera ce nouveau reste par le nombre qui marque combien de fois l'unité du second quotient contient l'espece immédiate de même nature, on divisera le produit de cette multiplication par le même diviseur, & on aura pour troisiéme quotient les unités de la troisiéme espece.

C'est-à-dire que si le quotient doit exprimer des livres, on multipliera le premier reste par 20, pour diviser le produit par le premier diviseur, & le second quotient donnera des sols. De même le second reste multiplié par 12, & divisé toujours par le premier diviseur donnera des deniers, & la somme des trois quotiens sera le quotient total demandé.

On aura donc autant de divisions à faire qu'il y aura d'especes au quotient.

Par exemple, on a paié $1283^{tt}\ 7^{ß}\ 8^{d}$ pour un ouvrage qui contient $56^{T}\ 3^{P}\ 5^{p}$, on demande à combien revient le prix de chaque toise. On aura $7^{ß}\ 8^{d} = 0.383$, & $3^{P}\ 5^{p} = 0.569$, on divisera donc 1283.383 par 56.569 à l'ordinaire.

$$\begin{array}{r|l} 1283.383 & 56.569 \\ 152\,003 & 22^{tt} \\ 38\,865 & \end{array}$$

On aura 22^{tt} au quotient, & un reste qu'on multipliera par

$$\begin{array}{r} 38865 \\ 20 \\ \hline \end{array}$$

On continuera à diviser le produit par le même diviseur 56.569, & le quotient sera $13^{ß}$.

$$\begin{array}{r|l} 777300 & 56569 \\ 211610 & 13^{ß} \\ 41903 & \end{array}$$

Enfin, on multipliera le reste de la seconde division ; c'est-à-dire, 41903
par 12 nombre des deniers contenus dans un sol, & le
produit 502836 sera encore divisé par le diviseur 56569, le quotient sera 8^d avec une fraction $\frac{50}{56} = \frac{25}{28}$ qui vaut presque un entier. On prendra donc 9 pour troisiéme quotient, & la somme 22^{tt} 13^{ß} 9^d des trois quotiens sera le prix demandé de chaque toise.



CHAPITRE V.

De l'Exaltation & de l'Extraction.

LORSQU'EN multipliant deux grandeurs algébriques l'une par l'autre, on a la même lettre pour multiplicande & pour multiplicateur, cette lettre doit avoir dans le produit un exposant égal à la somme des exposans qu'elle a dans les deux produisans.

$$a \times a = a^1 \times a^1 = a^{1+1} = a^2 \text{ (70)}.$$

165 1°. Le produit qui résulte d'une telle multiplication se nomme *puissance* de la quantité soumise à l'exposant. Ainsi $a, a^2, a^3, a^4 \ldots a^n$ sont des puissances de la quantité exprimée par a.

2°. Nous avons nommé le multiplicande & le multiplicateur, *les deux produisans*, ou *les racines du produit* (23); mais lorsque ces deux produisans sont les mêmes, on n'a qu'un produisant unique, & on l'appelle *racine de la puissance*. $a^2 = a \times a$, $a^4 = a^2 \times a^2$, &c. Donc a est la racine commune de toutes ses puissances $a, a^2, a^3, a^4, a^5 \ldots a^n$.

166 1°. *L'exaltation* est une opération par laquelle on éleve une quantité donnée à une puissance proposée.

2°. *L'extraction* (au contraire) est une opération par laquelle on trouve la racine demandée d'une quantité donnée.

3°. Le degré de la puissance d'une grandeur algébrique est toujours indiqué par l'exposant dont elle est affectée.

Donc $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 \ldots a^n$, sont les puissances des degrés 0, 1, 2, 3, 4, 5 .... n, de la quantité a.

Mais $a^0 = 1$; car $a^0 = \frac{a}{a} = \frac{a^2}{a^2} = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a^n}{a^n}$; puisque pour diviser, par exemple, a^n par a^n, on doit soustraire l'exposant n du diviseur sur l'exposant n du dividende (74); Donc $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$. Mais

la fraction $\frac{a^n}{a^n}$, & toutes les fractions qui auront leurs deux termes égaux, sont égales à l'unité (86 & 102). Donc $\frac{a^n}{a^n} = 1$. Donc aussi $a^0 = 1$. C'est-à-dire, que *toute quantité qui a zero pour exposant est égale à l'unité.*

4°. $a^0 = 1$ sera donc la puissance nulle, ou la puissance du degré zero de la quantité quelconque a.

$a^0 \times a = a^0 \times a^1$ (58) $= a^{0+1}$ (70) $= 1 \times a = a$, sera la première puissance de a.

$a^0 \times a \times a = a^{0+1+1}$ (70) $= 1 \times a \times a = a^2$, sera la seconde puissance de a.

$a^0 \times a \times a \times a = a^{0+1+1+1}$ (70) $= 1 \times a \times a \times a = a^3$, troisiéme puissance de a.

$a^0 \times a \times a \times a \times a = a^{0+1+1+1+1}$ (70) $= 1 \times a \times a \times a \times a = a^4$, quatriéme puissance de a.

L'exposant mis sur une quantité n'exprime donc pas (comme l'ont dit plusieurs Auteurs) que cette quantité est multipliée par elle-même autant de fois successivement que l'exposant contient de fois l'unité. Cette multiplication donneroit toujours une puissance qui excéderoit d'un degré celle marquée par l'exposant. Par exemple, si pour avoir la seconde puissance de a, je multiplie a deux fois par lui-même, j'aurai $a \times a \times a = a^3$ qui en est la troisiéme puissance ou le cube. Donc il y a excès d'un degré.

Il seroit plus exact de dire avec le plus grand nombre que l'exposant fait voir que la quantité qui lui est soumise est multipliée par elle-même autant de fois moins une que l'exposant contient d'unités. Mais on ne voit pas clairement qu'un exposant impair serve à exprimer un nombre pair de multiplications, & que l'exposant pair en exprime un nombre impair. Car selon ce principe on supposeroit a multiplié deux fois par lui-même pour donner le cube a^3, & pour avoir la quatriéme puissance de a, il faudroit multiplier a trois fois par lui-même. D'ailleurs on seroit embarassé d'appliquer cette définition de l'exposant, aux exposans fractionnaires dont nous aurons occasion de parler dans la suite.

167 Nous dirons donc comme ci-devant (50) que l'exposant marque qu'on a multiplié l'unité par la quantité qu'il affecte, autant de fois successivement que cet exposant lui-même contient d'unités.

Et comme ce que nous avons dit jusqu'à présent des quantités algébriques peut également s'appliquer aux nombres; dans ce que nous allons exposer, nous embrasserons ces deux sortes de grandeurs.

1°. Lorsque l'unité est multipliée une ou plusieurs fois successivement par une quantité quelconque, le produit qui en résulte s'appelle *puissance*, & la quantité qui a ainsi multiplié l'unité, se nomme *racine* de cette puissance.

On remarquera que par ce mot *successivement*, nous entendons que le produit de la premiere multiplication soit le multiplicande de la seconde, que le produit de la seconde soit le multiplicande de la troisiéme, & ainsi de suite, le multiplicateur étant toujours la quantité dont on veut avoir la puissance.

2°. On distingue les puissances différentes d'une même grandeur, en les désignant par le nombre de fois qu'on a successivement multiplié l'unité par cette grandeur pour en composer les puissances.

Et comme $1 \times a = a$; $1 \times 5 = 5$; $1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$; $1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$; il suit que toute quantité est à elle-même sa premiere puissance. Car le produit de l'unité par une quantité quelconque n'est autre chose que cette quantité même (101).

Si la grandeur dont il s'agit a multiplié deux fois successivement l'unité, le produit qui en résulte est appellé *seconde puissance ou carré* de cette grandeur.

a^2	sont les secondes puissances ou carrés de	a	parce que	$1 \times a \times a = a^2$
$\frac{a^2}{b^2}$		$\frac{a}{b}$		$1 \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$
25		5		$1 \times 5 \times 5 = 25$
$\frac{4}{9}$		$\frac{2}{3}$		$1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Si l'on a multiplié trois fois successivement l'unité par une même grandeur, le produit résultant est appellé *troisiéme puissance* ou *cube* de cette grandeur.

$$\left.\begin{matrix} a^3 \\ \\ \dfrac{a^3}{b^3} \\ \\ 125 \\ \\ \frac{8}{27} \end{matrix}\right\} \text{sont les troisiémes puissances ou les cubes de} \left\{\begin{matrix} a \\ \\ \dfrac{a}{b} \\ \\ 5 \\ \\ \frac{2}{3} \end{matrix}\right\} \text{parce que} \left\{\begin{matrix} 1 \times a \times a \times a = a^3 \\ \\ 1 \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{a^3}{b^3} \\ \\ 1 \times 5 \times 5 \times 5 = 125 \\ \\ 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \end{matrix}\right.$$

Il ſuit delà qu'en multipliant une puiſſance quelconque d'une quantité par la racine de cette puiſſance ou par cette quantité même, on aura la puiſſance immédiatement ſuivante de la même quantité.

$$\text{Les cubes} \left\{\begin{matrix} a^3 \\ \\ \dfrac{a^3}{b^3} \\ \\ 125 \\ \\ \frac{8}{27} \end{matrix}\right\} \text{multipliés par leurs racines} \left\{\begin{matrix} a \\ \\ \dfrac{a}{b} \\ \\ 5 \\ \\ \frac{2}{3} \end{matrix}\right\} \text{donneront les quatriémes puiſſances.} \left\{\begin{matrix} a^4 \\ \\ \dfrac{a^4}{b^4} \\ \\ 625 \\ \\ \frac{16}{81} \end{matrix}\right\} \text{\& ainſi de ſuite.}$$

3°. Réciproquement lorſqu'une grandeur quelconque eſt conſidérée comme une puiſſance, celle dont elle eſt puiſſance en eſt nommée la *racine*.

On l'appelle *racine ſeconde* ou *racine carrée* ſi la grandeur propoſée en eſt le carré; *racine troiſiéme* ou *racine cubique* ſi cette grandeur eſt ſon cube; racine quatriéme, cinquiéme, &c. ſi la quantité dont elle eſt racine en eſt la puiſſance quatriéme, cinquiéme, &c.

$$\text{Ainſi} \left\{\begin{matrix} a \\ \\ \dfrac{a}{b} \\ \\ 5 \\ \\ \frac{2}{3} \end{matrix}\right\} \text{ſont les racines carrées de} \left\{\begin{matrix} a^2 \\ \\ \dfrac{a^2}{b^2} \\ \\ 25 \\ \\ \frac{4}{9} \end{matrix}\right\} \text{les racines cubiques de} \left\{\begin{matrix} a^3 \\ \\ \dfrac{a^3}{b^3} \\ \\ 125 \\ \\ \frac{8}{27} \end{matrix}\right\} \text{\& les racines quatriémes de} \left\{\begin{matrix} a^4 \\ \\ \dfrac{a^4}{b^4} \\ \\ 625 \\ \\ \frac{16}{81} \end{matrix}\right\} \text{\& ainſi de ſuite.}$$

4°. Pour

4°. Pour indiquer une puissance d'une quantité quelconque, nous mettrons au-dessus de cette quantité le signe $P\overline{\ \ }$ que nous appellerons *signe potentiel*, & on écrira au-dessus de ce signe le caractere qui désigne le degré de la puissance à laquelle on veut élever cette quantité, & qu'on nomme *l'exposant de la puissance*.

Ainsi $P^{2}\!\underset{a}{\overline{\ \ }} = a^{2}$; $P^{3}\!\underset{a}{\overline{\ \ }} = a^{3}$; $P^{4}\!\underset{a}{\overline{\ \ }} = a^{4}$; $P^{n}\!\underset{a}{\overline{\ \ }} = a^{n}$; &c.

$P^{2}\!\underset{\frac{a}{b}}{\overline{\ \ }} = \frac{a^{2}}{b^{2}}$; $P^{3}\!\underset{\frac{a}{b}}{\overline{\ \ }} = \frac{a^{3}}{b^{3}}$; $P^{4}\!\underset{\frac{a}{b}}{\overline{\ \ }} = \frac{a^{4}}{b^{4}}$; $P^{n}\!\underset{\frac{a}{b}}{\overline{\ \ }} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$; &c.

$P^{2}\!\underset{5}{\overline{\ \ }} = 25$; $P^{3}\!\underset{5}{\overline{\ \ }} = 125$; $P^{4}\!\underset{5}{\overline{\ \ }} = 625$; $P^{5}\!\underset{5}{\overline{\ \ }} = 3125$; &c.

$P^{2}\!\underset{\frac{2}{3}}{\overline{\ \ }} = \frac{4}{9}$; $P^{3}\!\underset{\frac{2}{3}}{\overline{\ \ }} = \frac{8}{27}$; $P^{4}\!\underset{\frac{2}{3}}{\overline{\ \ }} = \frac{16}{81}$; $P^{5}\!\underset{\frac{2}{3}}{\overline{\ \ }} = \frac{32}{243}$; &c.

5°. Pour exprimer la racine d'une quantité quelconque, on écrit cette quantité sous le signe $\sqrt{\ }$ qu'on appelle *signe radical*, & au-dessus de ce signe on met le caractere qui exprime le degré de la racine qu'on veut avoir, & qu'on nomme *l'exposant de la racine*.

Ainsi $a = \sqrt[2]{a^{2}} = \sqrt[3]{a^{3}} = \sqrt[4]{a^{4}} = \sqrt[5]{a^{5}} = \sqrt[n]{a^{n}}$, &c.

$\frac{a}{b} = \sqrt[2]{\frac{a^{2}}{b^{2}}} = \sqrt[3]{\frac{a^{3}}{b^{3}}} = \sqrt[4]{\frac{a^{4}}{b^{4}}} = \sqrt[5]{\frac{a^{5}}{b^{5}}} = \sqrt[n]{\frac{a^{n}}{b^{n}}}$, &c.

$5 = \sqrt[2]{25} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[4]{625} = \sqrt[5]{3125} = \sqrt[6]{15625}$, &c.

$\frac{2}{3} = \sqrt[2]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \sqrt[6]{\frac{64}{729}}$, &c.

Il est d'usage de ne point écrire l'exposant 2 au-dessus du signe radical, on se contente de le supposer. Nous le supprimerons également au-dessus du signe potentiel. Ainsi quand un de ces signes n'aura point d'exposant, il sera censé avoir pour exposant le nombre 2 : mais nous ne nous dispenserons jamais d'écrire tout autre exposant.

168 Une puissance peut n'avoir qu'un seul produisant a, b, c, &c. comme a^2, a^3, a^4, a^m ; b^2, b^3, b^4, b^m ; c^2, c^3, c^4, c^m ; &c. ou en contenir plusieurs comme a^2b^4, a^6b^3, a^4b^2, $a^4b^4c^2$, &c.

Quelle que soit une quantité proposée comme puissance, on en pourra toujours extraire la racine exacte quand l'exposant du produisant unique, ou de chacun des produisans de la puissance contiendra une ou plusieurs fois exactement & sans reste l'exposant ou degré de la racine demandée.

1°. Alors la quantité dont on demande la racine s'appelle une *puissance parfaite*, & la racine qu'on en peut tirer se nomme *racine parfaite*, *rationelle* ou *commensurable*.

Mais lorsque l'exposant du produisant unique ou celui de quelqu'un des produisans de la puissance ne sera pas multiple de l'exposant de la racine demandée, on ne pourra pas tirer cette racine de la puissance proposée.

2°. Dans ce cas *la puissance* est *imparfaite*, & la racine demandée sera nommée *racine imparfaite*, *irrationnelle*, *incommensurable* ou *sourde*.

Ainsi $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2b}$, $\sqrt{a^3b^2}$, $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[4]{a^5b^2}$,

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}},\ \sqrt{\frac{a^3}{b^2}},\ \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2}},\ \sqrt[4]{\frac{a^5}{b^6}},\ \sqrt[4]{\frac{a^6}{b^5}},$$

sont des racines imparfaites, & les quantités soumises au signe radical sont des puissances imparfaites. De même quoique a^2, a^3, a^4, a^m; $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^m}{b^m}$, soient des puissances parfaites de a & de $\frac{a}{b}$, elles seront des puissances imparfaites dès qu'on en demandera des racines dont les exposans ne seront pas aliquotes des exposans de ces puissances; par cette raison $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{a^4}$; $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$, $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^4}}$; & en général $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}$, sont des racines imparfaites, & les quantités a^2, a^3, a^4, a^m ; $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^m}{b^m}$, seront regardées comme des puissances imparfaites relativement aux racines qu'on en cherche.

169 1°. Une racine qui n'a qu'un terme s'appelle *racine monome*, & comme les puissances de ces racines ne peuvent avoir aussi plus d'un terme, on les appelle *puissances monomes*. Toutes les puissances & les racines que nous venons de donner pour exemples sont dans ce cas.

2°. Une racine qui a plusieurs termes s'appelle en général *racine polinome*. On distingue en particulier chacune de ces racines par le nombre de ses termes: ainsi on appelle racine *binome* celle qui a deux termes, *trinome* celle qui en a trois, *quatrinome*, *quintinome*, *sextinome*, &c. celle qui en a quatre, cinq, six, &c.

Mais comme il seroit fort embarassant d'expliquer les principes de l'exaltation & de l'extraction sur chacun de ces polinomes en particulier, & que d'ailleurs ce détail deviendroit inutil, puisqu'on peut toujours réduire au binome, un polinome tel qu'il soit; nous examinerons seulement la formation des puissances du monome & du binome & l'extraction de leurs racines, & nous en ferons ensuite l'application aux polinomes plus composés.

De l'Exaltation & Extraction des Monomes.

On pourra toujours élever un monome tel qu'il soit à une puissance quelconque.

Car 1°. si ce monome n'a d'autre coëfficient ni d'autre exposant que l'unité, on en fera l'exaltation en donnant à chacune des lettres qui le composent, l'exposant de la puissance à laquelle on veut l'élever: ainsi $P\frac{}{a} = a^2$, $P\frac{3}{a} = a^3$, $P\frac{4}{a} = a^4$, $P\frac{m}{a} = a^m$, $P\frac{}{ab} = a^2b^2$, $P\frac{3}{ab} = a^3b^3$, $P\frac{m}{ab} = a^mb^m$ $P\frac{}{\frac{a}{b}} = \frac{a^2}{b^2}$, $P\frac{3}{\frac{a}{b}} = \frac{a^3}{b^3}$, $P\frac{m}{\frac{a}{b}} = \frac{a^m}{b^m}$, $P\frac{m}{\frac{ac}{bd}} = \frac{a^mc^m}{b^md^m}$.

2°. Si ce monome a d'autres exposans que l'unité, on multipliera chacun de ses exposans par celui de la puissance à laquelle on veut l'élever; par exemple, $P\frac{}{a^3} = a^6$, $P\frac{3}{a^2} = a^6$, $P\frac{4}{a^2} = a^8$, $P\frac{n}{a^m} = a^{mn}$, $P\frac{}{a^2b^2} = a^4b^4$, $P\frac{3}{a^2b^3} = a^6b^9$, $P\frac{4}{a^3b^4} = a^{12}b^{16}$, $P\frac{n}{a^mb^q} = a^{mn}b^{nq}$, $P\frac{}{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{a^6}{b^6}$, $P\frac{3}{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a^6}{b^6}$, $P\frac{n}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a^{mn}}{b^{mn}}$, &c.

3°. Si le monome qu'on veut élever à une puiſſance quelconque eſt affecté de quelque coëfficient que ce ſoit, on élevera le coëfficient à la puiſſance demandée, ſoit en multipliant l'unité par ce coëfficient autant de fois ſucceſſivement que l'indique le degré de la puiſſance à laquelle on veut l'élever, ſoit en lui donnant un expoſant égal à celui de cette puiſſance : ainſi $P^{2}_{\overline{2a}} = 4a^2$, $P^{3}_{\overline{2a}} = 8a^3$,

$P^{3}_{\overline{4ab}} = 64a^3b^3 = 4^3a^3b^3$, $P^{n}_{\overline{ma}} = m^na^n$, $P^{2}_{\overline{\frac{2a}{3b}}} = \frac{4a^2}{9b^2}$, $P^{3}_{\overline{\frac{2a}{3b}}} = \frac{8a^3}{27b^3}$,

$P^{n}_{\overline{\frac{ma}{qb}}} = \frac{m^na^n}{q^nb^n}$.

170 En général on élevera toujours une quantité monome telle que a, ou ab, ou $\frac{a}{b}$, &c. à une puiſſance quelconque n, en élevant à la puiſſance n, le coëfficient du monome, & multipliant chacun de ſes expoſans par la même grandeur quelconque n.

Suivant cette regle générale, on aura

1°. $P^{n}_{\overline{a}} = a^n$, $P^{n}_{\overline{ab}} = a^nb^n$, $P^{n}_{\overline{\frac{a}{b}}} = \frac{a^n}{b^n}$, $P^{n}_{\overline{\frac{ac}{bd}}} = \frac{a^nc^n}{b^nd^n}$.

2°. $P^{n}_{\overline{a^m}} = 1^{1\times n}a^{m\times n} = a^{mn}$, $P^{n}_{\overline{a^mb^q}} = 1^{1\times n}a^{m\times n}b^{q\times n} = a^{mn}b^{qn}$,

$P^{n}_{\overline{\frac{a^m}{b^s}}} = \frac{a^{mn}}{b^{sn}}$, $P^{n}_{\overline{\frac{a^mc^q}{b^sd^x}}} = \frac{a^{mn}c^{qn}}{b^{sn}d^{xn}}$.

3°. $P^{n}_{\overline{qa^m}} = q^{1\times n}a^{m\times n} = q\ a^{mn}$, $P^{n}_{\overline{qa^mb^s}} = q^{1\times n}a^{m\times n}b^{s\times n} = q^na^{mn}b^{sn}$,

$P^{n}_{\overline{\frac{qa^m}{rb^s}}} = \frac{q^na^{mn}}{r^nb^{sn}}$, $P^{n}_{\overline{\frac{ra^mc^x}{qb^sd^y}}} = \frac{r^na^{mn}c^{xn}}{q^nb^{sn}d^{yn}}$.

Il ne ſera pas plus difficile d'extraire d'un monome quelconque a, ou ab, ou $\frac{a}{b}$, &c. une racine d'un degré quelconque n.

Car 1°. ſi le monome dont on veut extraire la racine n'a ni coëfficient ni expoſans, on ſe contentera d'indiquer cette extraction par le ſigne radical; ainſi $\sqrt{a}$ & $\sqrt[3]{a}$, exprimeront la racine carrée & la racine cube de la quantité a; $\sqrt{\frac{a}{b}}$ & $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, exprimeront la racine carrée & la racine cube de la quantité $\frac{a}{b}$, & en général $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ exprimeront la racine du degré n de la quantité a, & de la quantité $\frac{a}{b}$.

2°. Si le monome eſt affecté d'expoſans, on diviſera l'expoſant de chacune des lettres qui compoſent ce monome, par celui de la racine qu'on en veut extraire. Si le quotient eſt une quantité entiere, la racine ſera parfaite ou commenſurable; ainſi $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[4]{a^4b^8} = ab^2$; $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$, $\sqrt{\frac{a^6}{b^6}} = \frac{a^3}{b^3}$, $\sqrt[n]{a^nb^{2n}} = ab^2$; au contraire cette racine ſera imparfaite quand l'expoſant d'une lettre diviſé par celui de la racine donnera pour quotient une fraction. Par exemple, $\sqrt{a^5}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{a^5b^2}$, $\sqrt[n]{a^mb^q}$, ſont des racines imparfaites, & en diviſant leurs expoſans par celui de la racine qu'on en veut extraire, on aura $\sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}}$, $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[4]{a^5b^2} = a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{2}{4}}$, $\sqrt[n]{a^mb^q} = a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{q}{n}}$, $\sqrt{\frac{a^5}{b^3}} = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$; $\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^s}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{s}{n}}}$; ce qui donne tout naturellement une double expreſſion des racines imparfaites, dont nous parlerons plus amplement dans la ſuite.

3°. Enfin ſi le monome dont on veut extraire la racine eſt précedé d'un coëfficient, on extraira de ſon coëfficient la racine demandée, ſoit en l'extraïant véritablement, ou ſe contentant d'en indiquer l'extraction ſelon l'article précédent, ce que l'on ſera obligé de faire toutes les fois que ce coëfficient ne ſera pas une puiſſance parfaite du même degré que la racine qu'on en veut extraire : ainſi $\sqrt{4a^2} = 2a$,

$\sqrt[3]{8a^3b^3} = 2ab$, $\sqrt{\frac{9a^2}{4b^2}} = \frac{3a}{2b}$, $\sqrt[3]{\frac{27a^3}{8b^3}} = \frac{3a}{2b}$, parce que 27 & 8; 9 & 4, sont les cubes & les carrés de 3 & de 2; mais $\sqrt{5a^2} = 5^{\frac{1}{2}}a$, $\sqrt[4]{9a^4b^4} = 9^{\frac{1}{4}}ab$, $\sqrt{\frac{5a^2}{b^2}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}a}{b}$, $\sqrt[4]{\frac{9a^4}{b^4}} = \frac{9^{\frac{1}{4}}a}{b}$, parce que 5 n'est pas un carré, & que 9 n'est pas une quatriéme puissance.

171 Mais comme on suppose toujours l'unité pour coëfficient, & pour exposant à chaque quantité, & que soit qu'on éleve l'unité à quelle puissance on voudra, ou qu'on en tire quelle racine on voudra, on aura toujours pour résultat l'unité, qu'en multipliant ou divisant une quantité quelconque par l'unité, le produit ou le quotient sera cette même quantité, on peut dire en général que pour extraire d'un monome la racine qu'on voudra, il faudra extraire de son coëfficient la racine indiquée, & diviser l'exposant de chaque lettre par celui de la racine qu'on en veut extraire.

Par exemple, $\sqrt[n]{a} = 1^{\frac{1}{n}}a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{ab} = 1^{\frac{1}{n}}a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$, (170. 1°.).

$\sqrt[n]{a^4b^2} = 1^{\frac{1}{n}}a^{\frac{4}{n}}b^{\frac{2}{n}} = a^{\frac{4}{n}}b^{\frac{2}{n}}$, $\sqrt[n]{a^mb^q} = 1^{\frac{1}{n}}a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{q}{n}}$, $\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^q}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{q}{n}}}$, (170. 2°.).

$\sqrt[n]{qa^mb^s} = q^{\frac{1}{n}}a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{s}{n}}$, $\sqrt[n]{q^{2n}a^mb^s} = q^{\frac{2n}{n}}a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{s}{n}} = q^2a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{s}{n}}$, $\sqrt[n]{\frac{qa^m}{sb^x}} = \frac{q^{\frac{1}{n}}a^{\frac{m}{n}}}{s^{\frac{1}{n}}b^{\frac{x}{n}}}$, (170. 3°.).

172 Jusqu'à présent nous n'avons point parlé des signes + ou − qui doivent précéder les puissances ou racines monomes, & nous leur avons toujours supposé le signe +; mais on doit remarquer à cet égard que

1°. Si la racine monome eſt poſitive & précédée du ſigne $+$, toutes ſes puiſſances ſeront poſitives ; car du poſitif multiplié par du poſitif ne peut produire que du poſitif (71).

2°. Si cette racine monome eſt affectée du ſigne négatif $-$, toutes ſes puiſſances impaires ſeront négatives, & ſes puiſſances paires ſeront poſitives : car 1°. la racine $-a$ multipliée par l'unité $+1 = -a$, ſa premiere puiſſance ; cette racine ou premiere puiſſance $-a \times -a$ ſa racine, ſera $= +a^2$, (69 & 71) ; ainſi ſa ſeconde puiſſance ou ſon carré aura le ſigne $+$; ce carré $+a^2 \times -a$ la racine, donnera un cube négatif $-a^3$, qui multiplié par ſa racine $-a$, rendra une quatriéme puiſſance poſitive $+a^4$. Et par les mêmes raiſons les puiſſances ſupérieures de la même quantité $-a$, ſeront alternativement négatives & poſitives, enſorte que ces puiſſances ſeront

$$-a^5,\ +a^6,\ -a^7,\ +a^8,\ -a^9,\ +a^{10},\ -a^{11},\ +a^{12},\ \&c.$$

3°. Par conſéquent les racines de degrés impairs doivent toujours avoir le même ſigne que les puiſſances dont elles ſont extraites, puiſque les puiſſances impaires ſont poſitives ou négatives comme leurs racines.

4°. Au contraire comme toutes les puiſſances paires ſont toujours poſitives, de quelque ſigne que leurs racines ſoient précédées, on ne ſait quand on veut extraire une racine paire d'une telle puiſſance, ſi cette racine doit être affectée du ſigne $+$ ou du ſigne $-$, puiſque $+a^2$ peut être & eſt également le carré de $+a$ & de $-a$; c'eſt pourquoi en extraïant une racine paire d'une quantité poſitive, on affecte cette racine du double ſigne $\pm$ qu'on exprime par *plus ou moins* ; ainſi $\sqrt{a^2} = \pm a$, $\sqrt[4]{a^8} = \pm a^2$, &c.

5°. Donc on ne peut pas extraire les racines de degrés pairs des quantités négatives, car toutes les puiſſances paires ſont poſitives ; $-a^2$, par exemple, ne peut pas être un carré, $-a^2$ eſt le produit de $+a \times -a$, ou celui de $+a^2 \times -1$. De même -25 ne peut être ni le carré de $+5$, ni celui de -5 ; -25 ne peut être que le produit de $-5 \times +5$, ou de $+25 \times -1$; enſorte qu'on ne peut extraire ces racines. Par conſéquent, $\sqrt{-\frac{a^2}{b^2}}$, $\sqrt{-\frac{1}{25}}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-25}$, ſont des quantités impoſſibles qu'on appelle *imaginaires*. De même $\sqrt{-a^2b^4}$, $\sqrt[4]{-a^4b^8}$, &c. ſont des racines impoſſibles ou imaginaires.

De l'Exaltation des Polinomes.

Soit une quantité quelconque de deux termes repréſentée par le binome $p+s$ dont p exprime le premier terme ou la premiere partie, & dont s déſigne la ſeconde partie ou le ſecond terme.

Si l'on multiplie ce binome $p+s$ par lui-même, on aura pour ſon carré, $p^2+2ps+s^2$; c'eſt-à-dire, que

173 Le carré d'un binome quelconque $p+s$, contient

Le carré de la premiere partie du binome $= p^2$.
Deux fois le produit de la premiere partie par la ſeconde $= 2ps$.
Le carré de la ſeconde partie $= s^2$.

Multipliant ce carré $p^2+2ps+s^2$ par ſa raciné $p+s$, on aura ſon cube $p^3+3p^2s+3ps^2+p^3$, par lequel on connoîtra que

174 Le cube d'un binome quelconque $p+s$ contient

Le cube de la premiere partie $= p^3$.
Trois fois le carré de la premiere partie multiplié par la ſeconde $= 3p^2s$.
Trois fois la premiere partie multipliée par le carré de la ſeconde $= 3ps^2$.
Le cube de la ſeconde partie $= s^3$.

Non-ſeulement le binome $p+s$ peut repréſenter un binome quelconque $3a^2b+2c^3d$, en ſuppoſant $p=3a^2b$, & $s=2c^3d$, mais ce même binome peut encore repréſenter tout polinome quelconque dont les termes ſeront affectés de coëfficiens & d'expoſans, tel que le polinome $2a+3b^2+4c^3+5d^4$, en ſuppoſant $p=2a$, & $s=3b^2+4c^3+5d^4$, ou $p=2a+3b^2$, & $s=4c^3+5d^4$, ou $p=2a+3b^2+4c^3$, & $s=5d^4$; c'eſt pourquoi nous ne parlerons que du binome (169).

Si on continue à multiplier chaque puiſſance du binome $p+s$ par ſa racine $p+s$, on aura la puiſſance ſuivante que l'on pourra traduire comme les deux précédentes.

Ainſi en multipliant pluſieurs fois ſucceſſivement l'unité ou $(p+s)^0$, par $p+s$, on aura la table ſuivante des puiſſances de ce binome.

Table des Puissances du Binome $p+s$.

La puissance nulle sera	1
La premiere puissance sera	$p+s$
Le carré sera	$p^2+2ps+s^2$
Le cube	$p^3+3p^2s+3ps^2+s^3$
La puissance 4e.	$p^4+4p^3s+6p^2s^2+4ps^3+s^4$
La 5e.	$p^5+5p^4s+10p^3s^2+10p^2s^3+5ps^4+s^5$
La 6e.	$p^6+6p^5s+15p^4s^2+20p^3s^3+15p^2s^4+6ps^5+s^6$
La 7e.	$p^7+7p^6s+21p^5s^2+35p^4s^3+35p^3s^4+21p^2s^5+7ps^6+s^7$
La 8e.	$p^8+8p^7s+28p^6s^2+56p^5s^3+70p^4s^4+56p^3s^5+28p^2s^6+8ps^7+s^8$.

Pour exalter un binome à quelle puissance on voudra, sans être obligé de multiplier de la sorte jusqu'à ce qu'on ait atteint la puissance demandée, il faut avoir égard 1°. au nombre des termes qui composeront la puissance demandée.

2°. Aux lettres qui entreront dans chaque terme de cette puissance.

3°. Aux exposans de chacune de ces lettres dans chacun de ces termes.

4°. Aux signes dont chacun de ces termes doit être affecté.

5°. Enfin aux coëfficiens qui leur appartiennent.

175 I°. La racine ou premiere puissance étant un binome est nécessairement composée de deux termes, & en examinant la table ci-dessus, il est aisé de remarquer que le nombre des termes d'une puissance quelconque du binome $p+s$, est égal à l'exposant de la puissance plus un. Par exemple, la puissance seconde a trois termes, la puissance troisiéme en a quatre, la puissance quatriéme en a cinq, & ainsi de suite, ensorte que si l'on appelle n le nombre des termes d'une puissance quelconque dont le degré soit m, on aura $n = m + 1$.

176 II°. On verra de plus dans cette table que le premier terme d'une puissance quelconque du binome $p+s$, ne contient que la

lettre p élevée à la puissance dont il s'agit, & que pareillement le dernier terme n'est composé que de la lettre s élevée à la même puissance: car le premier terme étant toujours produit par la multiplication du premier terme de la puissance immédiatement inférieure, par le premier terme p de la racine ne peut pas contenir d's; par la même raison, le dernier terme ne peut pas contenir de p, puisqu'il est composé de la multiplication du dernier terme de la puissance précédente par le dernier terme s de la racine: ainsi ce dernier terme ne contiendra que la lettre s élevée à la puissance demandée. Par conséquent si l'on éleve le binome $p+s$ à une puissance d'un degré n, le premier terme sera p^n, & le dernier terme sera s^n. Tous les termes intermédiaires étant composés de la multiplication de p, s, & de leurs puissances, contiendront des p & des s.

177 III°. On voit encore dans cette table que tous les termes de chaque puissance ont un nombre de dimensions égal à l'exposant de cette puissance (58); c'est-à-dire, que la somme des exposans de chaque terme est égale à l'exposant de la puissance à laquelle le binome est élevé: en telle sorte que l'exposant de la premiere partie ou de p, décroît successivement d'une unité dans chaque terme, & que l'exposant de la seconde partie s, croît à mesure que celui de p diminue, ensorte que la somme des dimensions sera la même dans tous les termes. Car chacun des deux termes de la racine qui n'a qu'une dimension, étant multiplié par ces mêmes termes d'une dimension, chaque terme du carré aura deux dimensions. Par la même raison, chaque terme du cube en aura trois, & ainsi de suite: ainsi en élevant le binome $p+s$ à la puissance d'un degré quelconque n, les termes sans coëfficiens & sans signes seront p^n, $p^{n-1}s$, $p^{n-2}s^2$, $p^{n-3}s^3$, $p^{n-4}s^4$, &c. & le dernier sera s^n.

IV°. A l'égard des signes dont doivent être affectés les termes des puissances d'un binome quelconque.

178 1°. Si le binome est $+p+s$, c'est-à-dire, si les deux termes de la racine sont tous deux positifs, tous les termes seront nécessairement positifs dans toutes les puissances, & seront par conséquent précédés du signe $+$.

2°. Si l'un des termes est positif & l'autre négatif; par exemple: si la racine est $+p-s$, il est évident que les termes qui ne contiendront point s ne pourront être négatifs; car du positif multiplié par du positif, ne peut produire que du positif (71): ainsi le premier ter-

me de chaque puissance sera positif, si le premier terme de la racine est positif; le second terme qui contiendra $-s$ à sa premiere puissance sera négatif, puisque du positif multiplié par du négatif donne au produit du négatif (71). Le troisiéme terme contiendra s^2, & sera par conséquent positif; car il ne peut pas être négatif par rapport à p qui est positif, & il ne peut l'être non plus par rapport à s, lorsque l'exposant de s sera pair (175): & comme l'exposant de s sera pair dans tous les termes impairs, tous les termes impairs seront positifs: de même aussi tous les termes pairs seront négatifs; car ces termes contiendront les puissances impaires de $-s$, savoir, $-s$, $-s^3$, $-s^5$, &c. (175).

179 Donc lorsque le premier terme est positif & le second négatif, toutes les puissances ont leurs termes alternativement positifs & négatifs à compter du premier terme qui est positif.

180 3°. Au contraire si le premier terme est négatif, le second étant positif, tous les termes seront alternativement négatifs & positifs dans les puissances impaires; car dans les puissances impaires, le premier terme de la racine négative élevé à un exposant impair sera négatif (175), mais dans le second terme, $-p$ sera élevé à un exposant pair, & par conséquent ce terme sera positif (175), au contraire dans les puissances paires, le premier terme sera positif, parce que p aura un exposant pair, & le second sera négatif, puisque la même lettre p sera élevée à une puissance impaire: & comme en continuant l'examen, le même ordre subsistera par les mêmes raisons; on en peut conclure qu'en élevant le binome $-p+s$ à telles puissances qu'on voudra, tous les termes seront alternativement négatifs & positifs, à compter du premier qui aura le signe $-$ dans les puissances impaires, & qu'au contraire dans les puissances paires, tous les termes seront alternativement positifs & négatifs, à compter du premier qui sera positif & qui sera précédé du signe $+$.

181 Donc les puissances paires du binome $+p-s$ seront égales & semblables aux puissances pareilles du binome $-p+s$: & par conséquent quand on voudra extraire une racine de degré pair d'un polinome dont les termes à commencer du premier seront alternativement positifs & négatifs, ou alternativement négatifs & positifs, on donnera alternativement à chaque terme de la racine qui en résultera le double signe $\pm$ ou $\mp$; par exemple, si l'on se propose d'extraire la racine carrée du polinome $p^2-2ps+s^2$, on aura $\sqrt{p^2-2ps+s^2}=\pm p\mp s$;

dans laquelle on prendra les deux signes supérieurs ou les deux signes inférieurs ; car le carré de $+p-s$, & celui de $-p+s$ sont également $p^2-2ps+s^2$.

182 4°. Enfin si le binome qu'on veut élever à quelque puissance que ce soit, est négatif : par exemple, si c'est $-p-s$; dans les puissances impaires tous les termes seront négatifs, & au contraire les puissances paires auront tous leurs termes positifs ; car 1°. le carré aura tous ses termes positifs, puisque tous ses produisans auront le même signe $-$ (71). 2°. Le cube sera négatif parce qu'il sera le produit d'un carré positif, par une racine négative (71), & ainsi de suite.

183 Donc les puissances impaires d'un binome tout positif $+p+s$ ou tout négatif $-p-s$, auront les mêmes signes que leurs racines ; & par conséquent les puissances paires du binome $+p+s$ & du binome $-p-s$ seront exactement les mêmes, par conséquent si l'on veut extraire une racine paire d'un polinome dont tous les termes soient positifs, on donnera à chaque terme de la racine le double signe $\pm$: ainsi si l'on demande la racine quatriéme de la quantité $p^4+4p^3s+6p^2s^2+4ps^3+s^4$, on aura $\sqrt[4]{p^4+4p^3s+6p^2s^2+4ps^3+s^4}=\pm p\pm s$. Mais si l'on demandoit la racine cinquiéme de $-p^5-5p^4s-10p^3s^2-10p^2s^3-5ps^4-s^5$, on auroit pour seule racine le binome négatif $-p-s$.

184 V. Enfin si l'on examine les coëfficiens des termes de la table des puissances du binome $\pm p\pm s$ ou seulement du binome $+p+s$, parce que les coëfficiens sont les mêmes dans tous les cas, & si on se donne la peine de former une table de ces coëfficiens, on aura une suite à laquelle M. Paschal a donné le nom *de triangle arithmétique*. Chaque rang horisontal de ce triangle contiendra les coëfficiens de tous les termes d'une puissance du binome : ces puissances (comme dans la table précédente) se succédent immédiatement, c'est-à-dire, suivent l'ordre naturel des nombres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c.

Triangle arithmétique de M. Paschal, contenant les coëfficiens des puissances du binome.

Coëfficiens des premiers termes. des seconds termes. des troisiémes termes. des quatriémes termes. des cinquiémes termes. des sixiémes termes. des septiémes termes. des huitiémes termes. des neuviémes termes. &c.

Coëfficiens									
de $(p+s)^0 = \frac{p+s}{p+s} = \frac{1}{1} = 1$	1								
de $(p+s)^1 = p+s$	1	1							
de $(p+s)^2 = p^2+2ps+s^2$	1	2	1						
de $(p+s)^3 =$ &c.	1	3	3	1					
de $(p+s)^4$	1	4	6	4	1				
de $(p+s)^5$	1	5	10	10	5	1			
de $(p+s)^6$	1	6	15	20	15	6	1		
de $(p+s)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
de $(p+s)^8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Le premier rang ne contenant qu'une fois le seul chiffre 1 ne peut donner les coëfficiens d'aucune puissance du binome. Car pour les deux termes que le binome contient à sa premiere puissance, il faut au moins deux coëfficiens. Ce n'est donc pas dans ce premier rang qu'on trouvera les coëfficiens d'un binome.

185 Mais 1°. dans chaque rang horisontal de ce triangle, le premier & le dernier nombre (que nous appellerons *les extrêmes*), sont chacun égaux à l'unité.

1°. Le second & l'avant dernier sont égaux au degré de la puissance du binome à laquelle ils servent de coëfficiens. Par exemple, dans le rang qui répond à la seconde puissance, le second nombre qui est en même tems l'avant dernier est 2. Dans le rang qui répond à la troisiéme puissance le second nombre est 3 ainsi que l'avant dernier. Donc si l'on suppose qu'un des rangs de cette table réponde à la puissance $(p+s)^m$, le coëfficient du second terme sera m.

3°. Les termes également éloignés des extrêmes ont aussi le même

coëfficient : parce que les deux termes p, s, de la racine n'aïant pas d'autre coëfficient que l'unité, & rien n'obligeant à ordonner par p plutôt que par s une puissance quelconque de ce binome, la multiplication réiterée ou l'exaltation doit donner les mêmes coëfficiens soit qu'on ordonne par s ou par p. Autrement le produit de $p+s$ par $p+s$, ne seroit pas égal à celui de $s+p$ par $s+p$. Par conséquent lorsqu'on aura déterminé le degré de la puissance à laquelle on veut élever le binome $p+s$, il suffira de chercher les coëfficiens de la moitié des termes, & on affectera les termes suivans des mêmes coëfficiens pris dans un ordre renversé.

186 4°. On verra de plus dans le triangle arithmétique ci-dessus que chaque terme de ce triangle est la somme du terme de même numero & du précédent de la puissance immédiatement inférieure ou du rang qui le précede, par exemple, les coëfficiens de la 4e. puissance, sont 1, 4, 6, 4, 1, & les coëfficiens de la 5e. sont $1=1+0$, $5=4+1$, $10=6+4$, $10=4+6$, $5=1+4$, $1=0+1$; & en général si l'on a pour coëfficiens des dix premiers termes d'une puissance quelconque m, les quantités

$$1,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,$$

$$1,\ a+1,\ b+a,\ c+b,\ d+c,\ e+d,\ f+e,\ g+f,\ h+g,\ i+h,\ \&c.$$

seront les coëfficiens des dix premiers termes correspondans de la puissance $m+1$ qui suit immédiatement la puissance m.

187 5°. Si l'on appelle *premiere bande* celle qui contient les coëfficiens des premiers termes ; *seconde bande*, celle des coëfficiens des seconds termes, &c. nous remarquerons qu'un terme quelconque d'une bande est égal à la somme de tous les termes compris dans la bande précédente jusqu'au terme correspondant exclusivement, ou jusqu'au terme de même numero inclusivement, par exemple, le quatriéme terme de la seconde bande est 4, & la somme des quatre premiers termes de la premiere bande est $1+1+1+1=4$. Le cinquiéme terme de la bande troisiéme $=15=1+2+3+4+5$ somme des cinq premiers termes de la seconde. Le quatriéme terme de la sixiéme bande $=56=1+5+15+35$ somme des quatre premiers termes de la cinquiéme bande, &c.

188 6°. Enfin, en général un terme quelconque d'une puissance indéterminée m du binome $\pm p \pm s$ aura pour coëfficient, le coëffi-

cient du terme précédent multiplié par l'exposant de p dans ce terme précédent, & divisé par l'exposant de s dans le terme actuel auquel on veut donner un coëfficient.

Car les exposans de p, étant	4,	3,	2,	1,	0,
& ceux de s, étant	0,	1,	2,	3,	4,
les coëfficiens	1,	4,	6,	4,	1,
sont égaux à	1;	$\frac{1\times4}{1}$;	$\frac{4\times3}{2}$;	$\frac{6\times2}{3}$;	$\frac{4\times1}{4}$,

Si p a pour exposans	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1,	0,
s aura	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
les cofficiens	1,	7,	21,	35,	35,	21,	7,	1,
sont égaux à	1;	$\frac{1\times7}{1}$,	$\frac{7\times6}{2}$;	$\frac{21\times5}{3}$;	$\frac{35\times4}{4}$;	$\frac{35\times3}{5}$;	$\frac{21\times2}{6}$;	$\frac{7\times1}{7}$;

& ainsi des autres.

Il est évident que quand on continueroit, s'il étoit possible, jusqu'à l'infini le triangle arithmétique ou la table des coëfficiens des puissances du binome, les quantités qui y seroient contenues conserveroient toujours le même ordre entre elles, & auroient toujours les mêmes propriétés. Par conséquent nous pourrons conclurre pour tous les coëfficiens de toutes les puissances ce que nous trouverons vrai des coëfficiens compris dans la table ci-dessus.

Nous avons vu (177), qu'en élevant le binome $\pm p \pm s$ à la puissance du degré m, les termes sans coëfficiens & sans signes seroient

$$p^m, \quad p^{m-1}s, \quad p^{m-2}s^2, \quad p^{m-3}s^3, \quad p^{m-4}s^4, \quad p^{m-5}s^5, \quad \&c.$$

& suivant ce qu'on vient de dire le coëfficient du premier terme étant toujours l'unité, les coëfficiens de ces termes seront

$$1. \ \frac{1\times m}{1}, \ \frac{m\times\overline{m-1}}{2}, \ \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}, \ \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}, \ \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times3\times4\times5};$$

Or 1°. L'unité est le coëfficient du premier terme de toute puissance quelconque. Donc le premier terme de la puissance m aura 1 pour coëfficient.

2°. $\frac{1 \times m}{1} = m$; mais m est le degré de la puissance, & nous savons que le coëfficient du second terme est toujours égal au degré de la puissance.

3°. $\frac{m \times \overline{m-1}}{2}$ sera le coëfficient du troisiéme terme, car si l'on fait

successivement	$m=2$,	$m=3$,	$m=4$,	$m=5$,	$m=6$,	&c.
on aura	1,	3,	6,	10,	15,	&c.
pour coëfficiens des troisiémes termes des puissances des degrés	2,	3,	4,	5,	6,	&c.

En continuant d'appliquer ce principe aux termes suivans, & donnant successivement à m toutes les valeurs qu'on voudra, on trouvera toujours la conformité la plus parfaite entre les coëfficiens que le calcul nous a donnés, & les formules qui désignent ces coëfficiens.

D'après ce que nous venons de voir (depuis le n°. 175), on pourra donc élever à tant de puissances qu'on voudra les binomes $+p-s$, $-p+s$, & $-p-s$: & les tables qu'on pourra former des puissances de ces binomes, ne différeront de celles des puissances du binome $+p+s$ que par les variations des signes $+$ & $-$ selon les regles expliquées ci-devant (179, 180, 181, 182, 183, 185).

189 Donc pour élever à la puissance du degré quelconque m un binome indéterminé $\pm p \pm s$, on pourra se servir de la formule générale suivante dans laquelle les coëfficiens & les signes seront déterminés, aussi-tôt qu'on aura déterminé la valeur de m & les signes de la racine ou premiere puissance du binome qu'on veut exalter.

Formule

Formule générale pour élever à tant de puissances qu'on voudra le binome $\pm p \pm s$.

$$P^{m}\overline{\pm p \pm s} = \pm p^{m} \pm m p^{m-1} s$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2} s^{2}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} p^{m-3} s^{3}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} p^{m-4} s^{4}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5} p^{m-5} s^{5}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5}}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} p^{m-6} s^{6}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5} \times \overline{m-6}}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} p^{m-7} s^{7}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5} \times \overline{m-6} \times \overline{m-7}}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} p^{m-8} s^{8}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5} \times \overline{m-6} \times \overline{m-7} \times \overline{m-8}}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} p^{m-9} s^{9}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5} \times \overline{m-6} \times \overline{m-7} \times \overline{m-8} \times \overline{m-9}}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10} p^{m-10} s^{10}$$

$$\pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \times \overline{m-5} \times \overline{m-6} \times \overline{m-7} \times \overline{m-8} \times \overline{m-9} \times \overline{m-10}}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11} p^{m-11} s^{11}, \text{ \&c.}$$

Cette formule pourra s'appliquer également à toutes les puissances; par exemple, si l'on veut s'en servir pour élever au carré le binome $p+s$, on verra que le troisiéme terme sera $= s^2$: car mettant 2 pour m,

on aura le 3°. terme $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2} s^2 = \frac{2 \times \overline{2-1}}{2} p^{2-2} s^2 = \frac{2}{2} p^0 s^2 = 1s^2 = s^2$.

Et comme la même chose arrivera toujours lorſque la quantité négative qui ſuit m dans le coëfficient ne différera que d'une unité de la grandeur m, & qu'elle la détruira lorſque ces deux grandeurs ſeront égales, on peut juger delà qu'en ſe ſervant de la formule on aura les mêmes termes & le même nombre de termes qu'on auroit eu en multipliant à l'ordinaire.

190 Nous avons ſuppoſé que le polinome qu'on vouloit exalter étoit un binome ſans coëfficiens & ſans expoſans; mais ſi l'on vouloit élever à une puiſſance quelconque m un polinome quelconque affecté d'expoſans & de coëfficiens; par exemple, le polinome $2b^3 + 5b^2c - 4abc - 3a^2b$, on pourroit ſuppoſer ce polinome égal au binome $p \pm s$, & dans cette hipothèſe chercher la valeur de chacun des termes de la formule de ce binome élevé à la puiſſance demandée, ou plus commodément encore, on ſuppoſeroit une partie de ce polinome égale au binome, & dès qu'on auroit trouvé la puiſſance demandée de cette partie, on la feroit répondre à la puiſſance de p ſeulement; par exemple, ſi l'on demande la ſeconde puiſſance de $2b^3 + 5b^2c - 4abc - 3a^2b$.

1°. Suppoſant $2b^3 = p$, & $+5b^2c = s$, ou $2b^3 + 5b^2c = p + s$,

on aura $\left\{\begin{array}{l} +p^2 = +4b^6 \\ +2ps = +20b^5c \\ +s^2 = +25b^4c^2 \end{array}\right\}$ & $p^2 + 2ps + s^2 = 4b^6 + 20b^5c + 25b^4c^2$.

2°. Suppoſant enſuite ce carré $4b^6 + 20b^5c + 25b^4c^2 = p^2$, & $-4abc = s$,

on aura $-16ab^4c^2 - 40ab^3c^2 = 2ps$

& $+16a^2b^2c^2 = s^2$,

enſorte qu'on auroit $\left.\begin{array}{l} 4b^6 + 20b^5c + 25b^4c^2 \\ \quad -16ab^4c - 40ab^3c^2 \\ \quad\quad +16a^2b^2c^2 \end{array}\right\} = p^2 + 2ps + s^2$.

3°. Enfin ſuppoſant ce carré égal à p^2, ſa racine $2b^3 + 5b^2c - 4abc$, ſera égale à p, & $-3a^2b$ ſera $= s$, ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} 4b^6 + 20b^5c + 25b^4c^2 \\ \quad -16ab^4c - 40ab\,c^2 \\ \quad\quad +16a^2b^2c^2 \end{array}\right\} = p^2$$

$$-12a^2b^4 - 30a^2b^3c + 24a^3b^2c = 2ps$$

$$+9a^4b^2 = s^2$$

Ainsi le carré demandé sera

$$4b^6+20b^5c+25b^4c^2-40ab^3c^2+16a^2b^2c^2$$
$$-16ab^4c-30a^2b^3c+24a^3b^2c$$
$$-12a^2b^4 \qquad +9a^4b^2$$

191 On pourra sur les mêmes principes élever toute quantité numérique à quelle puissance on voudra ; par exemple, si l'on demande le cube de $64=60+4$, faisant $p=60$, $s=4$, on aura

p^3	$=$			216000	(30)
$3p^2s$	$=$	$3\times3600\times 4$	$=$	43200	(30)
$3ps^2$	$=$	$3\times 60\times16$	$=$	2880	
s^3	$=$			64	
Et $p^3+3p^2s+3ps^2+s^3$			$=$	262144	

Il est souvent plus commode & plus court de multiplier l'unité par la quantité numérique qu'on veut exalter, autant de fois successivement que l'indique le degré de la puissance à laquelle on veut l'élever, ou (ce qui revient au même) de multiplier cette quantité par soi-même autant de fois moins une. Ainsi dans l'exemple précédent, on auroit eu,

1°. $1\times64=64$.
2°. La premiere puissance 64×64 sa racine, $=4096$.
3°. Le carré 4096×64 sa racine, $=262144$ cube de 64.

192 Pour élever une fraction polinome à une puissance quelconque, on élevera son numérateur & son dénominateur à la puissance demandée, ainsi

$$\overline{P\frac{a+b}{c-d}} \text{ ou } \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^2=\frac{aa+2ab+bb}{cc-2cd+dd}, \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{c^3-3c^2d+3cd^2-d^3} \text{ \&c.}$$

DÉMONSTRATION.

En comparant les principes de l'exaltation avec ceux de la multiplication, on reconnoîtra sans peine que cette opération n'est qu'un cas particulier de la multiplication, & que la démonstration de cette regle peut s'appliquer à l'exaltation, en substituant les mots *racine* & *puissance*, à ceux de *produisant* & de *produit*.

Donc le résultat de l'exaltation est la puissance demandée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

De l'Extraction des Racines Polinomes.

Nous avons vû (165) que l'extraction est une opération par laquelle on trouve la racine demandée d'une puissance proposée.

Nous avons pareillement vû (174) comment on doit extraire les racines des monomes algébriques.

193 L'extraction des quantités numériques dont la racine n'a qu'un seul chiffre, n'est pas susceptible de principes, & dépend uniquement de la connoissance qu'on doit avoir des puissances de ces quantités simples. La table suivante donnera les huit premieres puissances des dix premiers nombres.

Table des Puissances des dix premiers nombres.

Racines.	Carrés.	Cubes.	quatriémes puissances.	cinquiémes puissances.	sixiémes puissances.	septiémes puissances.	huitiémes puissances.
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	9125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823649	5765543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000

On voit dans cette table qu'à quelque puissance qu'on éleve l'unité, on aura toujours pour résultat l'unité : on y voit encore que les puissances du nombre 10 ne différent des puissances du nombre 1 que par les zeros dont les premieres sont suivies, & comme il est aisé de se convaincre en faisant attention à la maniere dont les puissances se forment, & aux principes de la multiplication que toutes les puissances des neuf premiers nombres ne différeront des puissances pareilles des mêmes nombres suivis d'un ou de plusieurs zeros, que par les zeros dont les dernieres seront aussi suivies, que d'ailleurs nous avons déja vû (30) qu'en multipliant un nombre par lui-même, il y auroit dans le produit total deux fois autant de caracteres après le produit particulier d'un chiffre quelconque par lui-même, qu'il y en a après ce chiffre dans le produisant unique. Il est aisé d'en conclure qu'il y aura dans tout carré deux fois autant de chiffres après le carré de chaque chiffre, qu'il y en a dans la racine après ce chiffre ; qu'il y en aura trois fois autant dans le cube, quatre fois autant dans la quatriéme puissance, &c. & en général.

194 Dans toute puissance d'une quantité numérique quelconque, il y aura toujours après la pareille puissance de chacun des chiffres dont la racine est composée, un nombre de caracteres égal au produit du nombre de caracteres dont ce chiffre est suivi dans la racine, multiplié par le degré de la puissance.

Ainsi en élevant le nombre 254 à telles puissances que l'on voudra, le carré de 2 sera suivi de quatre chiffres (30) ; son cube, de six ; sa quatriéme puissance de huit ; la cinquiéme, de dix ; la sixiéme de douze, &c. & le carré de 5 sera suivi de deux chiffres, son cube de trois, sa quatriéme puissance de quatre, sa cinquiéme puissance de cinq, sa sixiéme puissance de six, &c. au lieu que les puissances du dernier chiffre 4 ne seront suivies d'aucuns chiffres.

Donc si un chiffre quelconque est suivi d'un nombre n de chiffres dans une racine, & qu'on éleve cette racine à la puissance quelconque du degré m : ce chiffre dans la puissance sera suivi d'un nombre de chiffres $= mn$.

195 *En général pour extraire une racine quelconque d'une puissance parfaite de même degré, on comparera la grandeur proposée avec la puissance du binome* $\pm p \pm s$ *du degré dont il est question, & supposant ces deux quantités égales, on trouvera la racine demandée* $= \pm p \pm s$.

Par exemple, si l'on demande la racine 4e. du nombre 331776,

on ſuppoſera $p^4+4p^3s+6p^2s^2+4ps^3+s^4=331776$, & on fera les obſervations ſuivantes.

1°. Puiſque p^4 repréſente la quatriéme puiſſance de la premiere partie de la racine cherchée, ſa valeur eſt néceſſairement ſuivie de quatre chiffres, & ſe trouve par conſéquent dans les deux premiers 33 qui valent 330000 (194), on doit donc chercher dans la table quelle eſt la quatriéme puiſſance contenue dans 33! & trouvant 16 dont la racine eſt 2, comme 2 ſera ſuivi d'un chiffre, ſa quatriéme puiſſance ſera ſuivie de quatre chiffres (194); ainſi on ſuppoſera $p=20$, & on retranchera 160000 du nombre entier, ou 16 de 33.

2°. Aïant ſuppoſé $p=20$, on fera le produit $4p^3=4\times 8000=32000$ ou 32 ſuivi de trois chiffres, & comme $\frac{4p^3s}{4p^3}=s$, on trouvera la ſeconde partie de la racine ou la valeur de s, en diviſant par $32=4p^3$, ce qui reſte de la quantité & laiſſant à part les trois derniers chiffres; on aura donc 171 à diviſer par 32, ce qui ſembleroit donner au moins 5 pour le quotient; mais comme on a encore trois produits à faire après celui-ci, & à retrancher ſur ce qui reſtera (puiſque le terme $4p^3s$ eſt ſuivi de trois termes) & que d'ailleurs connoiſſant la quantité propoſée pour une puiſſance parfaite, on voit dans la table que toutes les puiſſances de 5 ſont terminées par 5, on prendra une unité de moins, & l'on ſuppoſera $s=4$, ou $p+s=20+4=24$, & mettant 20, 4, & leurs puiſſances à la place de p, s, & leurs puiſſances, on aura

$$\begin{array}{lcrcrcr} p^4 & = & 1\times20\times20\times20\times20 & & & = & 160000 \\ 4p^3s & = & 4\times8000\times\ 4 & = & 32000\times\ 4 & = & 128000 \\ 6p^2s^2 & = & 6\times\ 400\times16 & = & 2400\times16 & = & 38400 \\ 4ps^3 & = & 4\times\ \ 20\times64 & = & 80\times64 & = & 5120 \\ s^4 & = & 1\times4\times4\times4\times4 & & & = & 256 \\ \hline \text{Et}\ p^4+4p^3s+6p^2s^2+4ps^3+s^4 & & & & & = & 331776 \end{array}$$

De même pour extraire la racine cinquiéme de la grandeur algébrique $32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5$, on ſuppoſera cette quantité $=p^5+5p^4s+10p^3s^2+10p^2s^3+5ps^4+s^5$, & comparant ces deux quantités terme à terme, on aura $32a^5=p^5$.

Donc $2a = p$ sera la premiere partie de la racine ; & par conséquent, $4a^2 = p^2$, $8a^3 = p^3$, $16a^4 = p^4$, & $5p^4 = 5 \times 16a^4 = 80a^4$.

Divisant le second terme $240a^4b$ par $80a^4$ pour avoir la seconde partie de la racine cherchée, on aura $\frac{240a^4b}{80a^4} = 3b = s$, & par conséquent $s^2 = 9b^2$, $s^3 = 27b^3$, $s^4 = 81b^4$, $s^5 = 243b^5$.

Mettant $2a$ & ses puissances, pour p & ses puissances, substituant aussi $3b$ & ses puissances, à la place de s & de ses puissances, on aura

$$
\begin{array}{llll}
p^5 & = & & 32a^5 \\
5p^4s & = 5 \times 16a^4 \times b \times 3 & = & 240a^4b \\
10p^3s^2 & = 10 \times 8a^3b^2 \times 9 & = & 720a^3b^2 \\
10p^2s^3 & = 10 \times 4a^2b^3 \times 27 & = & 1080a^2b^3 \\
5ps^4 & = 5 \times 2ab^4 \times 81 & = & 810ab^4 \\
s^5 & = & & 243b^5
\end{array}
$$

Et comme les termes que donne l'opération sont les mêmes que ceux de la quantité proposée, il ne restera rien non plus que dans l'exemple précédent, & la racine cinquiéme demandée sera $2a + 3b$.

Il est évident par ce que nous venons de voir, qu'en extraïant une racine, on ne fait autre chose que décomposer, & (pour ainsi dire) disséquer la puissance produite par l'exaltation ; mais comme cette opération pourroit paroître trop peu détaillée à ceux qui n'y sont pas formés, & que d'ailleurs il arrive rarement qu'on soit dans le cas d'extraire des racines de degrés si élevés, nous allons développer les principes de l'extraction en les appliquant en particulier aux racines carrées & cubiques dont on a besoin plus souvent que de toute autre, & nous en donnerons des exemples sur les nombres & sur les quantités algébriques.

De l'Extraction des Racines carrées.

I.

De l'Extraction des Racines numériques du second degré.

196 Si l'on demande la racine carrée du nombre 219024, je remarque d'abord que la racine aura trois chiffres ; car le carré du dernier chiffre est compris dans les deux derniers chiffres de la puissance, le carré de l'avant-dernier sera suivi de deux chiffres & compris dans les deux chiffres 90, & par conséquent les deux premiers chiffres 21 qui sont suivis de quatre chiffres, comprennent le carré d'un caractere qui dans la racine sera suivi de deux autres (30 & 194) : par conséquent la racine aura trois chiffres, & comme suivant ce que nous avons déja vû, & que nous venons de repèter, le carré du dernier chiffre de la racine répond aux deux derniers chiffres de la puissance, nous séparerons ces deux chiffres de ceux qui les précédent, & nous chercherons d'abord la racine carrée de 2190, que nous reconnoîtrons être encore de deux chiffres dont le dernier a son carré compris dans les deux chiffres 90, nous séparerons donc encore ces deux chiffres 90 de ceux qui les précédent, & nous chercherons la racine carrée de 21.

Ce raisonnement fera sentir pourquoi on tranche de deux en deux caracteres le carré dont on veut extraire la racine

On aura donc $21|90|24 = p^2+2ps+s^2$ (195), & l'on opérera comme il suit.

1°. Le plus grand carré contenu dans 21 est 16 dont la racine est 4; je mets 4 pour la premiere partie p de la racine $p+s$, & soustraïant 16 de 21 & p^2 de $p^2+2ps+s^2$, il me reste $59024 = 2ps+s^2$.

2°. Pour trouver la quantité qui répond à s, vis-à-vis du reste 5, je descens le chiffre suivant 9, & je divise le nombre 59 qui en résulte par $8 = 2p$, $\frac{59}{8} = 7+\frac{3}{8}$; mais comme je dois ajouter au produit qui sera $= 2ps$, le carré s^2, je vois que je prendrois un quotient trop grand en prenant 7, je prends donc $6 = s$.

3°.

3°. Si $6 = s$, $2ps = 8 \times 6 = 48$, & comme nous opérons sur les deux premieres tranches pour avoir une racine de deux chiffres, dont 4 sera le premier, le produit 48 de ce premier chiffre 4 par 12 double du second 6, sera suivi d'un chiffre, & par conséquent $2ps = 480$, & $2p = 80$. Mais si l'on multiplie $2p + s$ par s, on aura $2ps + s^2$ reste de la formule : donc en multipliant $80 + 6 = 86$ par $6 = s$, on aura aussi ce qui reste du carré des deux premiers chiffres 46 : mais $86 \times 6 = 516$. On retranchera donc 516 du nombre 590 qui reste des deux premieres tranches, & l'on écrira le reste 74 au-dessous.

4°. Mais comme il reste encore une tranche sur laquelle nous n'avons point operé, nous supposerons à présent $46 = p$, & le carré de 46 qui a été retranché $= p^2$, & dans cette nouvelle hipothèse nous chercherons la valeur de s, en divisant ce qui reste des deux premieres tranches, suivi du premier chiffre de la derniere tranche, c'est-à-dire, 742 par $2 \times 46 = 92 = 2p$, & trouvant 8 au quotient, je suppose $8 = s$, & je multiplie $920 + 8 = 928$ (3°) par 8. Ce qui me donne $928 \times 8 = 7424$ qui est le reste du carré proposé, & par conséquent ce nombre proposé 219024 est un carré parfait dont la racine est 468.

86	21	90	24	{468	
6	16				
516	5	90		8	1er. diviseur
	5	16			
		74	24	92	2e. diviseur
928		74	24		
8		00	00		
7424					

Soit proposé le nombre 949687489 dont on demande la racine carrée.

En tranchant ce nombre de deux en deux caracteres, je vois que j'aurai cinq chiffres à la racine, & je dirai

Le plus grand carré contenu dans la premiere tranche 9, est 9 lui-même dont la racine est 3 ; je mets 3 à la racine.

Doublant 3, je diviserai ce qui reste de la premiere tranche suivi du premier chiffre de la seconde par $6 = 2 \times 3$, & comme le dividende 4 est plus petit que le diviseur 6, je mets 0 pour le second chiffre de la racine, & j'abaisse la seconde tranche 49 & le premier chiffre 6 de la suivante, & 496 sera mon dividende que je diviserai par 60, double

de 30 premiere partie de ma racine, ce qui me donnera 8 pour la seconde partie ou le troisiéme chiffre de ma racine.

608 × 8 = 4864 que je retranche de 4968, & il reste 104, devant lequel reste j'abaisse le chiffre suivant 7, & je divise 1047 par 616 double de la racine trouvée 308. 616 n'est contenu qu'une fois dans 1047, je place 1 pour le quatriéme chiffre de la racine, & multipliant 6161 par 1, je retranche le produit 6161 sur 10474, & il me reste 4313.

Je diviserai ce reste 4313 par 6162 double de la racine trouvée 3081, & par le quotient 7 qui en résultera, je multiplierai 61620 + 7, ou 61627, ce qui donnera pour produit 431389 égal au reste de la quantité proposée 949687489, qui par conséquent est un carré parfait dont la racine est 30817.

608	9	49	68	74	89	{30817
8	9					
4864						6
		49				
6161		49	68			60
1		48	64			
6161		1	04	74		6160
			61	61		61620
			43	13	89	
61627			43	13	89	
7			00	00	00	
431389						

Enfin on peut encore abréger cette opération en s'évitant la peine d'écrire les produits, & faisant en même tems la multiplication & la soustraction, comme nous avons fait ci-devant (39).

Ainsi pour extraire la racine carrée de 12759184, en suivant les principes qui ont été expliqués, on opérera comme il suit.

12	75	91	84	{3572		
3	75					
	50	91			60	65 × 5
	1	42	84		700	707 × 7
	0	00	00		7140	7142 × 2

Le plus grand carré contenu dans 12 est 9 dont la racine est 3; 3 fois 3 font 9 de 12 reste 3.

37 divisé par 6 donnera 5, & multipliant 65 par 5, 5 fois 5 font 25, de 25 reste 0 & retiens 2, 5 fois 6 font 30 & 2 font 32 de 37, reste 5.

509 divisé par 70 ou 5091 divisé par 700 donnera 7; 7 fois 7 font 49 de 51 reste 2 & retiens 5, 7 fois 0 & 5 font 5 de 9 reste 4, 7 fois 7 font 49 de 50 reste 1.

1428 divisé par 714 ou 14284 divisé par 7140 donnera 2; 2 fois 2 font 4 de 4 reste 0, 2 fois 4 font 8 de 8 reste 0, 2 fois 1 font 2 de 2 reste 0, 2 fois 7 font 14 de 14 reste 0.

Le nombre proposé 12759184 est donc un carré parfait, & sa racine est 3572.

On trouvera de même 1109140 pour la racine exacte du nombre carré 1230191539600.

Racine	1	23	01	91	53	96	00	carré
1109140.		23						
		2	01	91				
			3	10	53			
				88	72	96		
				00	00	00	00	

II.

De l'Extraction des Racines algébriques du second degré.

197 Soit proposé le carré algébrique

$$4a^2 + 12ab + 9bb - 16ac - 24bc + 16cc$$

dont on demande la racine carrée.

Comme cette quantité contient plus de termes que la formule, c'est une marque que sa racine aura plus de deux termes ; mais sans nous inquiéter de cette différence, nous prendrons dans la quantité proposée un terme qui soit un carré parfait comme $4a^2$, $9bb$ ou $16cc$, que nous supposerons $= p^2$, & nous ferons ainsi l'opération.

Si $4a^2 = p^2$, donc $2a = p$ sera le premier terme de la racine; doublant ce premier terme $2a$, on aura $4a = 2p$ pour premier diviseur par lequel on divisera quelqu'un des termes $12ab$, $-16ac$, qui peu-

vent tous deux se diviser par $4a$, faisant $12ab = 2ps$, comme $4a = 2p$, on aura $\frac{12ab}{4a} = \frac{2ps}{2p} = 3b = s$, donc $3b$ sera le second terme, & multipliant le diviseur $4a$ augmenté de $3b$ par $3b$, on aura pour produit $+12ab + 9bb$ qu'on retranchera du carré proposé, soit en les effaçant dans ce carré, soit en les ajoutant avec des signes contraires à ceux du produit, ce qui est également les retrancher (79).

A présent nous supposerons $4a^2 + 12ab + 9bb = p^2$, & $2a + 3b = p$; doublant cette racine trouvée $2a + 3b$, nous aurons pour second diviseur $4a + 6b$: nous chercherons dans la quantité restante, deux termes tels que $-16ac - 24bc$ qui puissent être divisés par $4a + 6b$, en disant $-$ divisé par $+$ donne $-$, $\frac{16ac}{4a} = 4c$; $-4c$ sera donc le troisiéme terme de la racine. Multipliant le diviseur plus ce troisiéme terme par ce troisiéme terme lui-même, on aura $\overline{4a + 6b - 4c} \times -4c = -16ac - 24bc + 16cc$, & pour soustraire $+16ac + 24bc - 16cc$, qui ajoutés à ce qui reste du carré proposé, il ne restera rien.

Donc la quantité algébrique proposée est un carré parfait, dont la racine est $2a + 3b - 4c$.

$$\left.\begin{array}{r} 4a^2 + 12ab + 9bb \\ -16ac - 24bc \\ +16cc \end{array}\right\} 2a + 3b - 4c$$

Si $2a = p$, donc
$$\begin{array}{rl} 4a^2 & = p^2 \\ +12ab & = 2ps \\ +9bb & = s^2 \end{array} \Big\} \text{donc } 3b = s$$

$$\text{Et } 4a^2 + 12ab + 9bb = p^2 + 2ps + s^2$$

Si $2a + 3b = p$, donc
$$\begin{array}{r} 4a^2 + 12ab + 9bb = p^2 \\ -16ac - 24bc = 2ps \\ +16cc = s^2 \end{array} \Big\} \text{donc } -4c = s$$

$$\text{Et } \left\{\begin{array}{r} 4a^2 + 12ab + 9bb \\ -16ac - 24bc \\ +16cc \end{array}\right\} = p^2 + 2ps + s^2$$

198 Il faut remarquer que la racine $2a+3b-4c$ que nous avons trouvée, n'eſt pas la ſeule racine du carré propoſé (184), & que la quantité $4c-2a-3b$, ou $-2a-3b+4c$, en eſt également la racine, & ſi nous avions ordonné ce carré par la lettre c en cette ſorte

$$\begin{array}{l} 16cc - 16ac + 4a^2 \\ \quad - 24bc + 12ab \\ \qquad\qquad + 9bb \end{array}$$

Nous aurions trouvé pour la racine $4c-2a+3b$, ainſi la véritable racine de ce carré ſera $\pm 2a \pm 3b \mp 4c$ en prenant tous les ſignes ſupérieurs, ou tous les ſignes inférieurs.

On trouvera de même la racine carrée de la quantité

	$36a^2+24ab+4bb$	$6a+2b+4m+3n$
$12a$ premier diviſeur	$+48am+16bm$	
$12a+4b$ ſecond diviſeur	$+36an+12bn$	
$12a+4b+8m$ troiſiéme diviſeur	$+16m^2$	
	$+24mn$	
	$+9n^2$	

en opérant comme il ſuit.

Si $36a^2=p^2$, $6a=p$ ſera le premier terme de la racine, & $12a$ ſera le diviſeur : $\frac{24ab}{12a}=2b$ en ſera le ſecond terme, & on aura $\overline{12a+2b}\times 2b=24ab+4bb$, & pour ſouſtraire $=-24ab-4bb$.

Faiſant $36a^2+24ab+4bb=p^2$, ou $6a+2b=p$, le ſecond diviſeur ſera $12a+4b$, & $\frac{48am+16bm}{12a+4b}=\frac{2ps}{2p}=4m$ ſera le troiſiéme terme de la racine. Multipliant donc $12a+4b+4m$ par $4m$, on aura le produit $48am+16bm+16m^2$ qu'on retranchera de la quantité propoſée.

Il reſte encore $36an+24mn+12bn+9n^2=2ps+s^2$, parce que l'on ſuppoſe que le carré retranché $=p^2$, ou que $6a+2b+4m=p$. on diviſera donc $36an+24mn+12bn$ par $12a+4b+8m=2p$ double de la racine trouvée, & comme $\frac{36an+24mn+12bn}{12a+4b+8m}$ ou $\frac{36an}{12a}=3n$, on prendra $3n$ pour le quatriéme terme cherché de la racine deman-

dée, & ajoutant ce quatriéme terme $3n$ au diviſeur $12a+4b+8m$, on multipliera cette ſomme par ce quatriéme terme, & l'on retranchera le produit qui en réſultera ſur ce qui reſte de la quantité propoſée; & comme $(12a+4b+8m+3n)\times 3n=36an+12bn+24mn+9nn$ = le reſte du carré propoſé, on conclura que cette quantité eſt un carré parfait dont la racine eſt $6a+2b+4m+3n$.

199 On remarquera encore que $-6a-2b-4m-3n$ peut être également la racine carrée de la quantité propoſée (106) enſorte que la vraie racine de cette quantité ſera $\pm 6a \pm 2b \pm 4m \pm 3n$ dans laquelle on doit prendre ou tous les ſignes ſupérieurs ou tous les ſignes inférieurs; car le carré propoſé aïant tous ſes termes poſitifs, ſa racine doit avoir tous ſes termes poſitifs, ou tous ſes termes négatifs (106).

Sur les mêmes principes on trouvera $\pm 8a \pm 3b \mp 4d$ pour la racine carrée de

$$\begin{array}{l} 64a^2+48ab+9b^2 \\ \quad -64ad-24bd \\ \qquad +16d^2 \end{array}$$

Et l'on aura en faiſant l'opération $16a$ pour premier diviſeur,
Et $16a+6b$ pour ſecond diviſeur,

De l'Extraction des Racines cubiques.

I.

De l'Extraction des Racines numériques du troiſiéme degré.

200 Soit propoſé le cube 658503 dont on demande la racine.

Comme ce nombre a plus de trois caracteres, ſa racine aura au moins deux chiffres, & comme il n'en a pas plus de ſix, cette racine n'aura pas plus de deux chiffres (194), on ſéparera donc les trois derniers chiffres de ceux qui les précédent, & reconnoiſſant que le cube du premier chiffre de la racine eſt néceſſairement compris dans la tranche des hautes eſpeces 658 ou dans la premiere tranche à gauche qui contient trois chiffres, & qui pourroit n'en contenir qu'un ou deux, on cherchera dans la table (193) le plus grand cube contenu dans 658, & trouvant 512 dont la racine eſt 8, on mettra 8 à la racine & on retranchera 512 de 658,

Comme on doit avoir supposé $658503 = p^3 + 3p^2s + 3ps^2 + s^3$, on aura $p = 8$, $p^3 = 512$, & puisqu'on retranche du nombre proposé $512 = p^3$, on retranchera aussi p^3 de la formule, & le reste de la formule sera égal au reste du cube numérique proposé; c'est-à-dire que $146503 = 3p^2s + 3ps^2 + s^3$.

Pour trouver le nombre $= 3p^2s$, vis-à-vis du reste 146, on abaissera le chiffre suivant 5, & la quantité qui répond à $3p^2$ sera comprise dans ce nombre 1465, parce que le premier chiffre 8 de la racine étant suivi d'un autre chiffre, son carré $= p^2$ sera suivi de deux chiffres (194).

Puisque $p = 8$, $p^2 = 64$, & $3p^2 = 192$, c'est-à-dire que 192 est le triple du carré de 8, & comme pour connoître s dans la formule on diviseroit $3p^2s$ par $3p^2$ que l'on connoît puisque l'on sait que $p = 8$, on divisera ce nombre $1465 = 3p^2s$ par $192 = 3p^2$, & l'on trouvera $7 = s$. (Il semble qu'on puisse prendre un quotient plus grand, mais si on se donnoit la peine de faire le calcul en supposant $s = 8$, on trouveroit que 8 est trop grand) 7 sera donc le second chiffre de la racine.

Pour s'assurer que 7 est véritablement le second chiffre de la racine, on retranchera sur ce qui reste du cube proposé, les quantités qui répondent aux trois termes restans de la formule en cette sorte,

1°. Multipliant 192 par 7, on aura 1344, & comme cette quantité doit être suivie de deux chiffres, on écrira deux zeros ou 00 après 1344 pour avoir $134400 = 3p^2s =$ le triple du carré de la premiere partie 8 de la racine multiplié par la seconde partie 7 de la même racine.

2°. On aura le second produit qu'on doit retrancher sur le reste du cube proposé, & qui doit répondre au terme $3ps^2$ en multipliant 24 ou 240 triple de 8 ou de 80 par 49 carré de 7, & comme $24 \times 49 = 1176$, & que le 8 de la racine n'est pas 8, mais 80, ce produit 1176 doit être suivi d'un chiffre, & est $= 11760$; ainsi le terme $3ps^2 = 11760$.

3°. Enfin on aura $s^3 = 343$ cube de la seconde partie 7 de la racine. Ajoûtant ces trois produits d'une part, & les trois termes restans de la formule, de l'autre; comme la somme des quantités numériques qui répond aux trois derniers termes de la formule est égale à ce qui reste du cube proposé, on en conclura que ce nombre est un cube parfait dont la racine est 87.

658	503	$= p^3 + 3p^2s + 3ps^2 + s^3$	$512 = p^3$
512			
146	503	$87 = 80 + 7 = p + s$	
146	503	$134400 = 3p^2s$	
		$11760 = 3ps^2$	
000	000	$343 = s^3$	
		$146503 = 3p^2s + 3ps^2 + s^3$	

En opérant de la même maniere, on trouvera 96 pour la racine cubique du nombre 884736.

Car si l'on suppose ce nombre $884736 = p^3 + 3p^2s + 3ps^2 + s^3$, on trouvera

trouvera p^3	=	729000	cube de 90 premier terme
$3p^2s$	=	145800	triple du carré de 90 multiplié par 6
$3ps^2$	=	9720	triple de 90 multiplié par le carré de 6
s^3	=	216	cube du second terme 6

Et $p^3 + 3p^2s + 3ps^2 + s^3 = 884736$ nombre cube proposé.

S'il y avoit plus de deux tranches au cube proposé, c'est-à-dire, si la racine étoit de plus de deux chiffres, l'opération seroit la même & ne différeroit des précédentes qu'en ce que l'on seroit obligé de faire successivement plusieurs hipothèses, regardant toujours la partie trouvée de la racine comme répondant à la premiere partie p du binome $p+s$, & le chiffre immédiatement suivant, comme $= s$ seconde partie du même binome.

Par exemple, on demande la racine cubique du nombre 23393656 dont la racine aura trois chiffres, parce que le nombre proposé a trois tranches.

On fera l'opération en cette sorte.

Le plus grand cube contenu dans la premiere tranche 23 est 8 dont la racine est 2, 8 de 23 reste 15.

Le triple du carré de 2 est 12, 153 divisé par 10 semble donner un quotient 12, mais si l'on pouvoit seulement prendre 10, le premier chiffre de la racine seroit 3 ; & comme 27 son cube n'est pas contenu

contenu dans 23, on n'a pas pu prendre 3 pour le premier chiffre de la racine. On ne pourra pas même mettre 9 pour le second chiffre; on mettra donc 8, & comme on suppose $20=p$, $8=s$, ou $28=p+s$, on aura $p^3 = 8000$, $3p^2s = 3\times400\times8 = 24\times400 = 9600$, $3ps^2 = 3\times20\times64 = 64\times60 = 3840$, $s^3 = 512$; mais on a déja retranché 8 ou $8000 = p^3$, on retranchera donc du reste 15393 des deux premieres tranches la somme 13952 des trois quantités qui répondent à $3p^2s+3ps^2+s^3$; la soustraction faite, il restera 1441.

A présent on supposera $p=280$ & $s=$ le dernier chiffre cherché de la racine, & comme on a retranché le cube de $280=p^3$, on n'a donc plus à soustraire du nombre proposé que les quantités qui répondent aux termes $3p^2s+3ps^2+s^3$.

On trouvera la valeur de s en divisant 14416 par $2352 = 3p^2$, & le quotient 6 sera le troisiéme chiffre de la racine. Donc $s=6$, & les produits à retrancher seront $3p^2s = 2352\times6 = 1411200$, $3ps^2 = 840\times36 = 30240$, $s^3 = 216$. Mais la somme 1441656 est égale au reste 1441656 du cube proposé 23393656.

Donc ce nombre est un cube parfait dont la racine est 286.

23	393	656	$= p^3 + 3p^2s + 3ps^2 + s^3$.
8			
15	393		286 *Racine*
13	952		
1	441	656	
1	441	656	
0	000	000	

Premiére hipothèse.

$3p^2s$	$= 9600$
$3ps^2$	$= 3840$
s^3	$= 512$
$3p^2s+3ps^2+s^3$	$= 13952$

Seconde hipothèse.

$3p^2s$	$= 1411200$
$3ps^2$	$= 30240$
s^3	$= 216$
$3p^2s+3ps^2+s^3$	$= 1441656$

II.

De l'Extraction des Racines algébriques du troisiéme degré.

201 On demande la racine cubique du polinome algébrique

$$\left.\begin{array}{r} 8a^3+36a^2b+\ 54ab^2+27b^3 \\ -48a^2c-144abc-108b^2c \\ +\ 96ac^2+144bc^2 \\ -\ 64c^3 \end{array}\right\}\begin{array}{l} 2a+3b-4c=p+s \\ =p^3+3p^2s+3ps^2+s^3. \end{array}$$

Si l'on fait $2a=p$, on aura $p^3 = 8a^3$
comme $3p^2=12a^2$, s fera $=3b$; $3p^2s = 36a^2b$
$3ps^2 = 54ab^2$
$s^3 = 27b^3$

Et $p^3+3p^2s+3ps^2+s^3=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

Si l'on fait $p=2a+3b$, ou $p^3 = 8a^3+36a^2b+\ 54ab^2+27b^3$
on aura $3p^2=12a^2+36ab+27bb$
& par conséquent $s=-4c$, & $3p^2s = -48a^2c-144abc-108b^2c$
$3ps^2 = +\ 96ac^2+144bc^2$
$s^3 = -\ 64c^3$

Si dans cette derniere hipothése on foustrait les termes produits par l'opération, fur le polinome propofé, comme ces deux polinomes font identiques, & qu'il ne reftera rien, on en conclurra que la grandeur propofée eft un cube parfait dont la racine eft $2a+3b-4c$.

Quoique la précédente opération foit évidente, cependant comme elle pourroit paroître trop concife à ceux qui ne fe font pas familiarifés avec le langage oculaire de l'Algébre, nous détaillerons davantage l'exemple fuivant.

$$\begin{array}{rrr} 125a^3-225a^2b & +135ab^2 & -\ 27b^3 \\ +300a^2c & -360abc & +108b^2c \\ -150a^2d & +180abd & -\ 54b^2d \\ & -240acd & +144bcd \\ & +240ac^2 & -\ 96bc^2 \\ & +\ 60ad^2 & -\ 36bd^2 \\ & & +\ 64c^3 \\ & & -\ 96c^2d \\ & & +\ 48cd^2 \\ & & -\ 8d^3 \end{array}$$

Prenant la racine cubique du premier terme $125a^3$ qui est un cube parfait, on aura $5a$ pour le premier terme de la racine.

On prendra le triple du carré de $5a$, c'est-à-dire, $75a^2$, & l'on divisera un terme tel que $-225a^2b$ par $75a^2$, le quotient $-3b$ sera le second terme de la racine.

Pour retrancher du cube proposé, le cube de $5a-3b$, comme on a déja retranché le cube de $5a$, ou soustraira 1°. trois fois le carré de $5a$ multiplié par $-3b$, ce produit sera $-225a^2b$. 2°. Trois fois le premier terme $5a$ multiplié par le carré $+9b^2$ du second $-3b$, ou $15a \times 9b^2 = 135ab^2$. 3°. Le cube $-27b^3$ de la seconde partie $-3b$.

Cette soustraction faite, on supposera $(5a-3b)=p$ le premier terme de la racine, & comme on a soustrait le cube de $5a-3b$, on cherchera d'abord le diviseur $= 3 \times (5a-3b)^2 = 75a^2 - 90ab + 27bb$, & on divisera par $75a^2$ le terme $+ 300a^2c$ qui est divisible par $75a^2$, le quotient $+4c$ sera le terme cherché de la racine.

Pour s'assurer que $4c$ est vraiment le troisiéme terme de la racine, 1°. On multipliera le diviseur entier $+75a^2-90ab+27b^2$ par ce quotient $+4c$, & on retranchera le produit $300a^2c-360abc+108b^2c$ de la quantité proposée: 2°. On multipliera pareillement le triple de la premiere partie; c'est-à-dire $15a-9b$, par le carré $+16c^2$ de la seconde, ce qui donnera $240acd-144bc^2$ qu'on doit aussi retrancher. 3°. Enfin on retranchera encore $+64c^3$ cube de $+4c$.

Pour trouver ce qui reste à trouver de la racine, on supposera que sa premiere partie $p=(5a-3b+4c)$, & que la seconde qu'on cherche $=s$, & comme on a déja retranché le cube de $(5a-3b+4c)$, on n'aura plus à soustraire que les produits qui répondent aux trois derniers termes $3p^2s+3ps^2+s^3$ de la formule.

On trouvera ces produits quand on connoîtra la valeur de s, & pour la découvrir on prendra le carré $25a^2-30ab+40ac+9bb-24bc+16c^2$ de la premiere partie $(5a-3b+4c)$ de la racine, & triplant ce carré, on aura $75a^2-90ab+120ac+27b^2-72bc+48c^2$ pour diviseur.

On divisera par $75a^2$ quelque terme comme $-150a^2d$ qui puisse être divisé par $75a^2$, le quotient sera $-2d$, qui par conséquent doit être le terme suivant de la racine.

On se convaincra que $-2d$ est le dernier terme de la racine, & que le polinome proposé est un cube parfait. 1°. En multipliant le diviseur par $-2d$, & retranchant du cube proposé, le produit $-150a^2d+180abd-240acd-54b^2d+144bcd-96c^2d$ qui en

résultera. 2°. Multipliant pareillement $(15a - 9b + 12c)$ triple de la racine trouvée par $+4dd$ carré de $-2d$, pour en soustraire de même le produit $60ad^2 - 36bd^2 + 48cd^2$. 3°. Enfin en retranchant encore $-8d^3$ cube de $-2d$.

Toutes ces opérations faites il ne restera rien du polinome proposé, & par conséquent ce polinome est un cube parfait dont la racine exacte est $5a - 3b + 4c - 2d$.

202. On ne doit pas craindre de se tromper sur les signes que doivent avoir les différens termes d'une racine cubique, & on ne s'y trompera jamais en donnant à chacun de ces termes le signe dont le cube de ce même terme est affecté dans le polinome dont on veut extraire la racine cubique ; car (95. 3°.) les racines de degrés impairs doivent toujours être affectées des mêmes signes que les puissances dont on les extrait, puisque des puissances impaires sont positives ou négatives comme leurs racines.

On ne peut se rendre trop familieres les formules $p^2 \pm 2ps + s^2$, $\pm p^3 \pm 3p^2s \pm 3ps^2 \pm s^3$ du carré & du cube d'un binome quelconque $\pm p \pm s$: Ces formules, & en général toutes les formules algébriques réunissent en elles le double avantage de donner les regles les plus universelles avec la précision la plus exacte & l'évidence la plus caractérisée, & de soulager la mémoire en présentant les principes les plus compliqués sous leur plus simple expression possible, en sorte que l'esprit les saisit aussi-tôt que l'oeil les apperçoit.

DÉMONSTRATION.

Il faut démontrer en général que $\pm p \pm s = \sqrt[m]{\pm p^m \pm mp^{m-1}s \pm \&c.}$ mais nous avons vû (166. 169. 189.) que

$$P^m_{\pm p \pm s} = \pm p^m + mp^{m-1}s \pm \frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2}s^2 \pm \&c.$$

& nous savons (167. 169. 173.) que $a = \sqrt[m]{a^m}$. Donc aussi $\pm p \pm s =$

$$\sqrt[m]{\pm p^m \pm mp^{m-1}s \pm \frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2}s^2 \pm \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} p^{m-3}s^3 \pm \&c.}$$

Ce qu'il falloit démontrer.

203 Comme on peut appliquer au numérateur & au dénominateur d'une fraction polinome ce que nous avons dit sur le polinome en général, il est clair qu'on extraira la racine demandée d'une fraction polinome en extraïant la racine du degré proposé de son numérateur & de son dénominateur.

Ainsi $\frac{a+b}{c-d} = \sqrt{\frac{aa+2ab+bb}{cc-2cd+dd}} = \sqrt[3]{\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{c^3-3c^2d+3cd^2-d^3}}$, &c.

Nous verrons dans le Chapitre suivant comment on opére lorsque le numérateur ou le dénominateur, ou tous deux ne sont pas des puissances parfaites du degré de la racine qu'on se propose d'en extraire.



CHAPITRE VI.

Des Racines imparfaites.

204 IL arrive souvent que les quantités dont on se propose d'extraire les racines ne sont pas des puissances parfaites du degré demandé, & alors il est impossible d'en trouver une racine exacte; c'est-à-dire, telle que l'unité multipliée par cette racine autant de fois successivement que le degré de la racine contient d'unités, rétablisse le nombre ou la grandeur algébrique qu'on a proposée pour puissance. Dans ce cas on est obligé de se contenter d'en approcher, & comme on peut toujours rendre l'erreur aussi peu considérable qu'on veut, on parvient à une racine approchante de la vraie, & on néglige la différence presque insensible qui se trouve entre la racine approchée qu'on a trouvée & la racine exacte qu'on ne peut avoir.

Ces racines de puissances imparfaites ne peuvent s'exprimer ni en entiers ni en fractions, parce qu'elles n'ont point de rapport déterminé avec l'unité. On les représente par le signe $\sqrt{}$ qu'on met au-dessus des quantités proposées, avec un exposant égal au degré de la racine demandée, & on les appelle *incommensurables*.

Pour donner une idée nette de ces grandeurs incommensurables, supposons qu'on demande la racine carrée de 24: comme 24 n'est pas un carré parfait, il est clair que la racine carrée de 24, qui doit être plus grande que $4 = \sqrt{16}$, & plus petite que $5 = \sqrt{25}$, ne pourra s'exprimer en nombres entiers; mais si l'on suppose que cette racine puisse être le nombre 4 avec une fraction, par exemple $4 + \frac{8}{9}$, qui étant réduit donnera la fraction excédente $\frac{44}{9}$; il est aisé de prouver le contraire.

Toute fraction quelconque qu'on supposera exprimer la racine exacte d'une puissance imparfaite ou sera réduite à ses plus simples termes ou pourra y être réduite, & alors ses termes étant primitifs entre eux peuvent être représentés en général par les deux termes a & b de la fraction $\frac{a}{b}$. Mais à quelque puissance qu'on éleve la fraction $\frac{a}{b}$, dont les termes n'ont aucun diviseur commun, les fractions $\frac{aa}{bb}$,

$\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^m}{b^m}$, qui exprimeront ses puissances, ne pourront se réduire en entiers. Car pour réduire une fraction en entier, il faut que son numérateur soit multiple de son dénominateur; or a^m ne contient aucun diviseur b, a^m n'est composé que de l'unité multipliée m fois successivement par le seul diviseur a, par conséquent le dénominateur b^m n'étant pas aliquote de son numérateur a^m, la fraction $\frac{a^m}{b^m}$ ne pourra jamais être réduite en un entier : Donc la fraction qu'on pourroit supposer la racine exacte d'une puissance imparfaite n'aura de quantité entiere pour aucune de ses puissances, & réciproquement une puissance imparfaite ne peut avoir pour sa racine exacte une fraction ; & comme cette racine ne peut être un entier, il est aisé d'en conclurre que toute puissance imparfaite ne peut avoir de racine exacte, & que l'unité multipliée par quelque quantité commensurable que ce soit autant de fois successivement que l'indique le degré de la puissance demandée, ne pourra jamais rétablir exactement la grandeur proposée.

205 Lors donc qu'on se propose d'extraire une racine quelconque d'une grandeur qui n'est pas une puissance parfaite de même degré que la racine qu'on en veut extraire, on prend dans la quantité proposée la partie la plus grande qu'il soit possible & qui compose une puissance du degré demandé, & regardant cette puissance trouvée comme la puissance parfaite de la premiere partie d'un binome, sa racine exacte est prise pour le premier terme de la racine cherchée, & calculant comme pour une puissance parfaite, on approche tant qu'on veut de la véritable valeur de la racine imparfaite; c'est-à-dire, qu'on rendra l'erreur aussi petite qu'on voudra, en cherchant la racine demandée comme si cette racine étoit une grandeur commensurable; & on approchera d'autant plus de sa véritable valeur, qu'on aura poussé le calcul plus loin.

Lorsqu'on ne veut pas s'embarrasser dans de longs calculs, on peut par un moïen fort simple que nous allons examiner, trouver la valeur approchée de la racine demandée d'une grandeur numérique : nous traiterons ensuite de l'approximation des racines algébriques.

De l'Approximation des Racines.

I.

De l'Approximation des Racines numériques.

206 Lorsqu'il s'agira d'extraire la racine quelconque d'une quantité numérique, il est évident que l'on trouvera la racine du plus grand carré ou du plus grand cube, &c. qui y soit contenu, & que telle différence qui se trouve entre le nombre proposé & ce plus grand carré, ce plus grand cube, ou enfin le plus grand nombre possible qui soit une puissance exacte du degré demandé, la racine exacte de cette premiere partie ne peut différer d'une unité entiére d'avec la vraie valeur de la racine cherchée, puisque s'il y avoit une unité entiere la racine seroit un nombre entier, & s'il y avoit entre ces deux racines une différence plus grande que l'unité, on n'auroit pas pris le plus grand nombre possible qui soit une puissance exacte du degré proposé.

Par exemple, la racine carrée de 24 est plus grande que 4 & plus petite que 5, car 4 est la racine de 16, & 5 est la racine de 25, & comme la racine de 24 doit être entre 4 & 5, on voit que la racine de 16 ou 4 ne peut différer d'une unité de la racine de 24, puisque $4+1=5$ est la racine de $25>24$; ces racines peuvent encore moins avoir entre elles une différence plus considérable que l'unité. De même la racine carrée de 42 est plus grande que $6=\sqrt{36}$, & plus petite que $7=\sqrt{49}$.

207 Soit une grandeur numérique quelconque représentée par a, son carré sera a^2, son cube a^3, sa quatriéme puissance a^4, &c. si l'on cherche ensuite les pareilles puissances du nombre entier immédiatement suivant $a+1$, on aura $P_{\overline{a+1}}=a^2+2a+1$, $P^{3}_{\overline{a+1}}=a^3+3a^2+3a+1$, $P^{4}_{\overline{a+1}}=a^4+4a^3+6a^2+4a+1$. Et si l'on retranche des puissances de $a+1$, les puissances de a, on aura leurs différences $2a+1$, $3a^2+3a+1$, &c. c'est-à-dire, que *si deux nombres different d'une unité, leurs carrés different entre eux du double du plus petit nombre plus l'unité*, & que *leurs cubes different de trois fois le carré du petit nombre, trois fois le petit nombre plus l'unité.*

Donc

Donc en extraïant la racine carrée d'une quantité quelconque, il ne peut rester à chaque extraction particuliere plus que le double de la racine trouvée, car s'il reste une unité de plus, on a pris pour le chiffre précédent de la racine un nombre trop petit d'une unité (207).

Donc en extraïant la racine cubique d'une quantité quelconque, il ne peut rester à chaque extraction particuliere plus que le triple du carré de la racine trouvée, & le triple de cette racine: car s'il reste une unité de plus, c'est une marque évidente que le chiffre dernier mis à la racine est trop petit d'une unité (207).

Ainsi 25 ou $\overline{P_5} = 16\ (\overline{P_4}) + 2 \times 4 + 1 = 16 + 9 = 25$; $\overline{P_9}$ ou $81 = 64\ (\overline{P_8}) + 2 \times 8 + 1 = 64 + 17 = 81$.

De même on verra que les cubes de 4 & de 5, de 8 & de 9, &c. ont entre eux la différence que nous venons de trouver entre les cubes de a & de $a+1$; car $125 = 64 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 1 = 64 + 48 + 12 + 1 = 64 + 61$, & $9^3 = 8^3 + 3 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 1$, ou $729 = 512 + 192 + 24 + 1 = 512 + 217$.

208 Sur ce fondement. Quand on veut extraire la racine carrée d'une grandeur numérique qui n'est pas un carré parfait, on cherche d'abord le plus grand carré qui soit contenu dans le nombre proposé, & après l'en avoir retranché on fait du reste le numérateur d'une fraction à laquelle on donne pour dénominateur le double de la racine trouvée plus l'unité.

Ainsi la racine carrée de 5253 sera $72 + \frac{69}{145}$.

La racine carrée de 4537 sera $67 + \frac{48}{135}$.

Et en général la racine carrée de $a^2 + b$ sera $a + \dfrac{b}{2a+1}$.

209 On aura aussi la valeur approchée de la racine cubique d'un nombre qui n'est pas un cube parfait en retranchant de ce nombre proposé le plus grand cube qui y soit contenu, & prenant le reste pour numérateur d'une fraction à laquelle on donnera pour dénominateur trois fois le carré de la racine trouvée, trois fois cette racine, plus l'unité.

Ainsi la racine cubique de 86436 sera $44 + \frac{1252}{5941}$.

La racine cubique de 125436 sera $50 + \frac{436}{7651}$.

Et en général la racine cubique de $a^3 + b$ sera $a + \dfrac{b}{3a^2 + 3a + 1}$.

210 Il est encore aisé de se convaincre que ces valeurs sont différentes de la véritable en les élevant aux puissances demandées.

Par exemple, $72+\frac{69}{145}$ élevé au carré, c'est-à-dire, $(\frac{72\times145+69}{145})^2$, donnera $5253+\frac{4766}{21025}$, & on trouvera de même que les valeurs approchées des autres racines sont ou au-dessous ou au-dessus des véritables racines; puisqu'étant multipliées par elles-mêmes une ou deux fois, elles donneront des quantités plus grandes ou plus petites que les nombres proposés pour carrés ou pour cubes: mais pour en donner une idée plus claire, & s'éviter en même tems un calcul assez peu utile & trop embarrassant si l'on réduit le mixte $a+\frac{b}{2a+1}$ en une seule fraction (110), & qu'on multiplie cette fraction par elle-même, on trouvera pour son carré une grandeur différente de la quantité proposée a^2+b. Car la racine supposée $a+\frac{b}{2a+1}=$ (110) $\frac{2a^2+a+b}{2a+1}$, & cette fraction étant élevée au carré ou $(2a^2+a+b)^2=$

$$\frac{4a^4+4a^3+a^2+4a^2b+2ab+bb}{4a^2+4a+1}=a^2+b+\frac{bb-2ab-b}{4a^2+4a+1}.$$

Il est vrai qu'il semble d'abord que la partie fractionnaire de cette racine approchée pourroit se détruire & elle se détruiroit en effet s'il étoit possible que $bb=2ab+b$, car alors le carré positif bb seroit anéanti par les deux termes négatifs $-2ab-b$; & le numérateur $bb-2ab-b$ devenant égal à zero, la quantité entiere a^2+b resteroit seule & se trouveroit rétablie par la multiplication de la racine supposée par soi-même. Pour prouver le contraire, supposons pour un moment $bb-2ab-b=0$, ou $bb=2ab+b$, en divisant tous les termes par b, on aura donc $b=2a+1$; c'est-à-dire, que cette fraction ne s'évanouira que quand on aura $b=2a+1$. Mais nous avons vû que si au carré a^2 on ajoute $2a+1$, on aura le carré immédiatement suivant dont la racine sera $a+1$; & comme dans l'hipothèse b doit être plus petit que $2a+1$, il est évident que cette fraction ne s'évanouira pas.

On pourra faire des remarques semblables sur les puissances plus élevées.

211 Mais on approchera beaucoup plus de la véritable valeur de la racine numérique d'une puissance imparfaite en se servant de la progression décimale des nombres continuée au-dessous de l'unité, c'est-à-dire, en ajoutant à la quantité proposée autant de zeros qu'on voudra pour former un nombre exact de tranches de chiffres décimaux dont chacune fournissant à la racine un chiffre décimal, donnera moïen d'approcher tant qu'on voudra de la racine cherchée : ainsi de quelque degré que soit la racine qu'on se propose d'extraire, si on ajoute à la puissance imparfaite une tranche de zeros, la racine approchée ne sera pas au-dessous ou au-dessus de la vraie racine de la valeur de $\frac{1}{10}$; l'erreur ne sera pas de $\frac{1}{100}$, en mettant deux tranches : elle sera moindre que $\frac{1}{1000}$ si on ajoute trois tranches, & elle sera moindre que $\frac{1}{10000}$ si on en met quatre, & ainsi de suite ; & comme nous avons vû (156), si le reste est plus grand que la moitié du dernier diviseur, on ajoutera une unité au dernier chiffre décimal de la racine ce qui rendra encore l'erreur plus petite de moitié : ainsi la plus grande erreur possible ne sera pas de $\frac{1}{20}$, ou de $\frac{1}{200}$, ou de $\frac{1}{2000}$, ou de $\frac{1}{20000}$, &c. en ajoutant une, ou deux, ou trois, ou quatre, &c. tranches de zeros au nombre proposé. On observera dans l'opération de faire passer par le point qui sépare les entiers d'avec les décimales, une des lignes verticales qui divisent la puissance en plusieurs tranches, & après avoir fait l'extraction à l'ordinaire, on placera le point qui doit précéder les décimales, ensorte qu'il y ait après lui autant de chiffres qu'on a ajouté de tranches de zeros.

212 Donc on approchera de la racine exacte d'un carré imparfait, en ajoutant à ce carré imparfait une ou plusieurs tranches de deux zeros chacune, & faisant l'extraction à l'ordinaire (196).

Par exemple, si l'on demande la racine carrée du nombre 552, on pourra l'écrire sous cette forme 5|52,|00|00|00|00|00, & l'on trouvera 23.49468 pour sa racine trop petite, & 23.49469 pout sa racine trop grande qui est plus proche de la véritable valeur.

5	52,	00	00	00	00	00	{23.49468
1	52						
	23	00					
	4	44	00				
		21	99	00			
		3	19	64	00		
			37	70	84	00	

Par une opération ſemblable on trouvera pour la racine approchée de 136 ou de 1|36|00|00|00|00 la quantité numérique 11.6619.

Comme on a ajouté à la puiſſance imparfaite 552, cinq tranches de zeros, & que le reſte eſt plus grand que la moitié du dernier diviſeur, la plus grande 23.49469 des deux racines que l'on peut prendre ne differe pas de la véritable racine de $\frac{1}{100000}$ de l'unité principale; par la même raiſon, la racine 11.6619 ne differe pas de la vraie racine incommenſurable de 136.00000000, de la valeur de $\frac{1}{10000}$, & par conſéquent on peut négliger des erreurs auſſi peu conſidérables.

213 Donc auſſi l'on aura la valeur approchée de la racine exacte d'un cube imparfait en ajoutant à ce cube imparfait une ou pluſieurs tranches de chacune trois zeros, à proportion qu'on voudra approcher plus près de la véritable valeur de la racine impoſſible demandée.

Par exemple, ſi l'on demande la racine cubique approchée de la quantité numérique 9532, enſorte que l'erreur ſoit moindre que $\frac{1}{1000}$, on ajoutera à ce nombre 9532, trois tranches de zeros, & on fera l'extraction comme ci-deſſus (200), cette opération donnera 21,529.

9	532,	000	000	000	{21.529
8	8.				
1	532				
1	261				
	271	000			
	236	375			
	34	625	000		
	27	760	808		
	6	864	192	000	
	4	173	233	689	
	2	690	958	300	

214 Lorſque l'on veut extraire la racine quelconque d'une fraction numérique dont les deux termes ne ſont pas des puiſſances parfaites de même degré que la racine demandée, on peut approcher de la racine de cette fraction par le moïen des fractions décimales, & pour cela

1°. On réduira la fraction à ſes plus petits termes poſſibles, & ſi la fraction ainſi réduite ſe trouve avoir un dénominateur de la puiſ-

ſance demandée, on en extraira la racine exacte, & enſuite par le moïen des décimales on cherchera la racine approchée de ſon numérateur (213).

2°. Si la fraction réduite à ſa plus ſimple expreſſion n'a point un dénominateur de la puiſſance demandée, que ſon numérateur ſoit ou ne ſoit pas une puiſſance de même dégré, on multipliera le numérateur de la fraction par ſon dénominateur autant de fois que l'exige le degré de cette puiſſance demandée, c'eſt-à-dire, qu'on multipliera le numérateur une fois par ſon dénominateur ſi l'on demande une racine carrée, deux fois pour une racine cubique, &c. & prenant enſuite le dénominateur de la fraction propoſée pour le dénominateur de la racine, on cherchera par le moïen des décimales la racine approchée du numérateur de cette fraction ainſi transformée.

Cette multiplication ne change point la valeur de la fraction, car on multiplie les deux termes une ou pluſieurs fois par une même quantité, & par conſéquent on les multiplie également : donc on ne change pas la valeur de la fraction propoſée (101).

On voit bien qu'il ſeroit inutile de prendre la peine de multiplier le dénominateur propoſé par lui-même une ou pluſieurs fois, il ſuffit de multiplier le numérateur une ou pluſieurs fois par le dénominateur, & de conſerver le dénominateur propoſé pour être celui de la fraction qui exprimera la racine cherchée.

Par exemple, ſi l'on demande la racine carrée de la fraction $\frac{5}{7}$ qui eſt réduite à ſa plus ſimple expreſſion, & dont le dénominateur 7 n'eſt point un carré, en multipliant ſon numérateur 5 par 7, la fraction deviendra $\frac{35}{7\times7}$ extraïant la racine carrée de 35 (214), & prenant le premier dénominateur 7 pour celui de la racine fractionnaire cherchée, on aura $\frac{5 \cdot 911}{7}$ pour la racine de $\frac{5}{7}$.

Si l'on demande la racine carrée de $\frac{24}{33}$ ou de $\frac{8}{11}$ qui eſt de même valeur, multipliant le numérateur 8 par 11, on aura $\frac{88}{11\times11}$, & cherchant la racine approchée du numérateur 88, la racine demandée ſera $\frac{9 \cdot 381}{11}$.

De même ſi l'on demande la racine cubique de $\frac{27}{40}$, quoique le numérateur 27 ſoit le cube parfait de 3, on multipliera 27 par 1600 carré du dénominateur 40, & l'on cherchera la racine approchée du numérateur de la fraction de même valeur $\frac{43200}{40\times40\times40}$, ce qui donnera $\frac{35 \cdot 25}{11}$.

On voit qu'en multipliant 27 par le carré de 40, & indiquant la multiplication du dénominateur 40 par ce même carré, on multiplie toute la fraction par le carré de 40 & le dénominateur eſt par

conſéquent le cube de 40, dont la racine cubique ſera néceſſairement 40.

215 Il ſera encore plus commode de ſe ſervir des fractions décimales pour approcher tant qu'on voudra de la valeur exacte impoſſible de la racine d'une fraction dont les deux termes ne ſont point des puiſſances parfaites du degré dont on demande la racine.

Pour cela on transformera la fraction propoſée (152) dans une fraction décimale qui ait un nombre de chiffres décimaux égal ou double ou en général multiple du nombre qui exprime le degré de la racine qu'on en veut extraire, afin que le dénominateur ſuppoſé 100, 1000, 10000, &c. ſoit une puiſſance parfaite du même degré. Enſuite on extraira la racine du numérateur, qui n'aura qu'un nombre de chiffres ſous-double, ſous-triple, ou en général ſous-multiple de celui des chiffres décimaux de la puiſſance imparfaite ſur laquelle on a operé.

Donc ſi l'on demande la racine carrée d'une fraction, on la transformera dans une décimale qui ait un nombre pair 2, ou 4, ou 6, ou 8, &c. de chiffres, afin que ſon dénominateur ſous-entendu ſoit 100, ou 10000, ou 1000000, ou 100000000, &c. & par conſéquent un nombre carré, & ſa racine aura 1, ou 2, ou 3, ou 4 chiffres, c'eſt-à-dire, que ſa racine n'aura que la moitié du nombre des chiffres de la fraction transformée.

Si l'on demande la racine cubique d'une fraction, on la réduira en une fraction décimale qui contienne un nombre ternaire 3, 6, 9, ou 12, &c. de chiffres décimaux, afin que ſon dénominateur ſous-entendu ſoit un nombre cube, & que ſa racine ait 1, 2, 3, ou 4 chiffres.

Il en ſera de même à proportion des puiſſances plus élevées.

Par exemple, ſi l'on demande la racine carrée de la fraction $\frac{2}{3}$; ajoûtant ſix zeros au numérateur 2, on aura $\frac{2.000000}{3} = \frac{2}{3}$, diviſant le nouveau numérateur 2.000000 par 3, on aura pour quotient 0.666666 dont la racine carrée ſera 0.816.

0.66	66	66	{0.816	
2	66			
1	05	66		$161 \times 1 = 161$
	8	10		$1626 \times 6 = 9756$

De même ſi l'on demandoit la racine carrée de la fraction $\frac{23}{25}$, on auroit $\frac{23}{25} = \frac{23.00000000}{25} = 0.92000000$ dont la racine trop grande

ſera 0.96, ou 0.960, ou 0.9600, &c. & dont la racine trop petite ſera 0.9599.

Si l'on demande la racine cubique de la fraction $\frac{3}{4}$, on aura à fort peu près $\frac{9}{10}$ ou 0.9 pour la racine demandée; car en faiſant l'extraction de $0.750000000 = \frac{3}{4}$, l'opération donnera 0.907.

0.750	000	000	{0.907
729			
21	000	000	
17	142	643	
3	857	357	

$$\begin{aligned} 2430000 \times 7 &= 17010000 \\ 2700 \times 49 &= 132300 \\ 7 \times 7 \times 7 &= 343 \\ \hline & 17142643 \end{aligned}$$

dans laquelle on pourra remarquer que le ſecond chiffre décimal doit être zero, parce que 24300 triple du carré de 90 eſt plus grand que 21000 reſte des deux premieres tranches.

I I.

De l'Approximation des Racines algébriques.

Il y a différens moïens pour approcher de la racine exacte impoſſible d'une quantité algébrique qui n'eſt pas une puiſſance parfaite de même degré que la racine qu'on demande; mais la plûpart ne ſont pas toujours praticables. Le ſeul qu'on puiſſe toujours emploïer ne peut même être entendu que par ceux qui ſavent le calcul des expoſans dont nous ne devons pas ſuppoſer la connoiſſance. C'eſt pourquoi nous nous contenterons d'expoſer ici ſucceſſivement les premiers, & nous reſerverons le dernier pour l'expliquer après que nous aurons vû le calcul des expoſans.

La premiere méthode que nous en allons donner eſt moins une approximation qu'une réduction par laquelle on change une expreſſion compoſée en une autre plus ſimple.

216 Pour trouver la racine imparfaite d'une quantité algébrique, on ſéparera cette quantité propoſée en deux diviſeurs, de maniere que l'un (le plus grand qu'il ſera poſſible) ſoit une puiſſance parfaite de même degré que la racine qu'on ſe propoſe d'extraire, & tirant de cette puiſſance la racine demandée, on mettra ſur le ſe-

cond diviseur le signe radical $\sqrt{}$ affecté de l'exposant du degré proposé.

Par exemple, si l'on demande la racine carrée de a^2m+a^2, comme cette quantité est le produit de $a^2 \times \overline{m+1}$, on prendra a racine carrée de a^2 pour la premiere partie commensurable de la racine cherchée, & le second diviseur $m+1$ affecté du radical $\sqrt{}$ en sera la seconde partie incommensurable. Donc $\sqrt{a^2m+a^2}=a\times\sqrt{m+1}$.

Si l'on veut avoir la racine carrée du polinome algébrique

$$\begin{array}{l} 8a^2m+24abm+18b^2m \\ +4a^2n+12abn+\ 9b^2n. \end{array}$$

On reconnoîtra avec un peu d'attention que ce polinome est le produit de $(4a^2+12ab+9b^2)\times(2m+n)$, & comme le premier diviseur est un carré parfait, sa racine $2a+3b$ sera la partie commensurable de la racine cherchée, & $\sqrt{2m+n}$ en sera la partie incommensurable, en sorte que la racine entiere sera $\overline{2a+3b}\times\sqrt{2m+n}$.

De même si l'on demande la racine cubique du polinome

$$\begin{array}{l} 2am^3+\ 6am^2n+\ 6amn^2+2an^3 \\ -5bm^3-15bm^2n-15bmn^2-5bn^3 \end{array}$$

Comme ce polinome est composé de la multiplication du cube $(m^3+3m^2n+3mn^2+n^3)\times(2a-5b)$, on prendra la racine $m+n$ pour la premiere partie commensurable de la racine cherchée, & $\sqrt[3]{2a-5b}$ sera la seconde partie incommensurable de la même racine. Ce qui donnera pour cette racine $\overline{m+n}\times\sqrt[3]{2a-5b}$.

Il est évident qu'il n'y aura pas plus de difficulté à appliquer cette regle aux puissances les plus élevées, puisqu'on pourra toujours découvrir les diviseurs d'une quantité & choisir celui qui sera une puissance parfaite du degré proposé.

217 Il arrivera le plus souvent que la puissance imparfaite algébrique proposée aura un ou plusieurs de ses termes élevés au degré

dont

dont on demande la racine. Alors on approchera, par une suite infinie, tant qu'on voudra de sa racine exacte impossible.

Pour cela on transformera la puissance imparfaite proposée en une autre quantité qui contiendra une puissance parfaite du degré demandé avec un reste positif ou négatif qu'on exprimera par $\pm r$.

Par exemple, si l'on demande la racine carrée de $a^2 + 3ab + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (carré de $a + b$, avec un reste) $+ ab + b^2$, on supposera le carré parfait $a^2 + 2ab + b^2 = x^2$, & le reste $+ ab + b^2 = + r$, ensorte que la quantité proposée $a^2 + 3ab + 2b^2 = x^2 + r$, on cherchera la racine carrée de $x^2 + r$, & après l'avoir trouvée on substituera $a + b$, $ab + b^2$ & leurs puissances à la place de x, r, & leurs puissances pareilles.

Si l'on demandoit la racine cubique de $a^3 + b^3$, on supposeroit $x = a + b$, & $x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & comme à ce cube on a ajoûté la quantité négative $- 3a^2b - 3ab^2$, on supposeroit aussi $- 3a^2b - 3ab^2 = - r$, & on auroit $x^3 - r = a^3 + b^3$, on chercheroit la suite infinie qui doit exprimer la racine de $x^3 - r$, & on substitueroit dans les termes de cette suite $a + b$ & ses puissances à la place de x & ses puissances, & on remplaceroit de même $- r$ & ses puissances par $- 3a^2b - 3ab^2$ & ses puissances pareilles.

Car toute grandeur qui n'est pas une puissance parfaite d'un degré quelconque proposé, contient nécessairement une puissance parfaite du même degré avec un reste positif ou négatif. Mais comme on ne connoît pas les quantités proposées ni le rapport qui est entre elles, on ne pourra emploier cette méthode que dans le cas où l'on aura un ou plusieurs termes élevés au degré dont on demande la racine. On ajoûtera donc ce qui manque, ou l'on soustraira ce qu'il y a de trop pour composer une puissance parfaite du degré demandé; mais en même tems pour ne point changer la valeur de la quantité proposée, on représentera par $- r$, ce qu'on aura ajouté à cette quantité, ou au contraire on exprimera par $+ r$ ce qu'on aura retranché de cette quantité pour avoir une puissance parfaite du degré demandé, & on cherchera la racine approchée de cette puissance parfaite quelconque x^n avec son reste $\pm r$ selon qu'on en a retranché ou qu'on y a ajoûté.

Cela posé, on commencera par extraire la racine de la premiere partie de la grandeur proposée; c'est-à-dire de la partie qu'on aura fait répondre à x^n, & regardant la quantité qui correspond à $\pm r$ comme devant contenir les produits de la premiere partie trouvée par la seconde que l'on cherche, & la puissance n de cette seconde partie; on suivra la méthode que nous avons donnée (195, &c.) pour

l'extraction : c'est-à-dire, qu'on comparera la puissance imparfaite supposée avec la puissance parfaite du degré demandé du binome $p \pm s$, & l'on trouvera une suite infinie qu'on pourra continuer aussi loin qu'on voudra. Plus cette suite contiendra de termes, plus elle approchera de la racine impossible demandée.

Puisqu'on peut représentet une puissance imparfaite quelconque par le binome $x^n \pm r$, il nous suffira de chercher les suites qui expriment les racines imparfaites de ce binome, d'après lesquelles on pourra former les suites ou racines des quantités proposées.

EXEMPLE I.

Qui peut servir de formule pour la racine carrée.

En suivant les principes de l'extraction, on aura pour la racine carrée de $x^2 \pm r$ la suite infinie

$$x \pm \frac{r}{2x} - \frac{r^2}{8x^3} \pm \frac{r^3}{16x^5} - \frac{5r^4}{128x^7} \pm \frac{7r^5}{256x^9} - \frac{21r^6}{1024x^{11}} \pm \frac{33r^7}{2048x^{13}}$$

$$- \frac{143r^8}{11256x^{15}} \pm \frac{725r^9}{67536x^{17}} - \frac{2431r^{10}}{270144x^{19}} \pm \frac{46189r^{11}}{5943168x^{21}} - \&c.$$

EXEMPLE II.

Formule pour extraire les racines cubiques.

La racine cubique du binome $x^3 \pm r$ sera la suite infinie

$$x \pm \frac{r}{3x^2} - \frac{r^2}{9x^5} \pm \frac{5r^3}{81x^8} - \frac{10r^4}{243x^{11}} \pm \frac{22r^5}{729x^{14}} - \frac{154r^6}{6561x^{17}}$$

$$\pm \frac{374r^7}{19683x^{20}} - \frac{935r^8}{59049x^{23}} \pm \frac{21505r^9}{1594313x^{26}} - \frac{55913r^{10}}{4782939x^{29}}$$

$$\pm \frac{1621477r^{11}}{157856987x^{32}} - \&c.$$

Enfin on aura la racine du degré n du binome $x^n \pm r$ en suivant la formule générale suivante.

Formule générale pour extraire la racine du degré n *du binome* $x^n \pm r$.

218 Cette racine s'exprimera par la suite infinie

$$x \pm \left(\frac{1}{n}\right) \times \frac{r}{x^{n-1}} - \left(\frac{1 \times \overline{1-n}}{n \times 2n}\right) \times \frac{r^2}{x^{2n-1}} \pm \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n}}{n \times 2n \times 3n}\right) \times \frac{r^3}{x^{3n-1}}$$

$$- \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n} \times \overline{1-3n}}{n \times 2n \times 3n \times 4n}\right) \times \frac{r^4}{x^{4n-1}}$$

$$\pm \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n} \times \overline{1-3n} \times \overline{1-4n}}{n \times 2n \times 3n \times 4n \times 5n}\right) \times \frac{r^5}{x^{5n-1}}$$

$$- \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n} \times \overline{1-3n} \times \overline{1-4n} \times \overline{1-5n}}{n \times 2n \times 3n \times 4n \times 5n \times 6n}\right) \times \frac{r^6}{x^{6n-1}}$$

$$\pm \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n} \times \overline{1-3n} \times \overline{1-4n} \times \overline{1-5n} \times \overline{1-6n}}{n \times 2n \times 3n \times 4n \times 5n \times 6n \times 7n}\right) \times \frac{r^7}{x^{7n-1}}$$

$$- \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n} \times \overline{1-3n} \times \overline{1-4n} \times \overline{1-5n} \times \overline{1-6n} \times \overline{1-7n}}{n \times 2n \times 3n \times 4n \times 5n \times 6n \times 7n \times 8n}\right) \times \frac{r^8}{x^{8n-1}}$$

$$\pm \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n} \times \overline{1-3n} \times \overline{1-4n} \times \overline{1-5n} \times \overline{1-6n} \times \overline{1-7n} \times \overline{1-8n}}{n \times 2n \times 3n \times 4n \times 5n \times 6n \times 7n \times 8n \times 9n}\right) \times \frac{r^9}{x^{9n-1}}$$

$$- \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n} \times \overline{1-3n} \times \overline{1-4n} \times \overline{1-5n} \times \overline{1-6n} \times \overline{1-7n} \times \overline{1-8n} \times \overline{1-9n}}{n \times 2n \times 3n \times 4n \times 5n \times 6n \times 7n \times 8n \times 9n \times 10n}\right) \times \frac{r^{10}}{x^{10n-1}}$$

$$\pm \left(\frac{1 \times \overline{1-n} \times \overline{1-2n} \times \overline{1-3n} \times \overline{1-4n} \times \overline{1-5n} \times \overline{1-6n} \times \overline{1-7n} \times \overline{1-8n} \times \overline{1-9n} \times \overline{1-10n}}{n \times 2n \times 3n \times 4n \times 5n \times 6n \times 7n \times 8n \times 9n \times 10n \times 11n}\right) \times \frac{r^{11}}{x^{11n-1}}$$

— &c.

Remarque.

Cette formule générale ainsi que les deux formules particulieres qui la précédent, sont tirées de la formule générale donnée ci-devant (189).

On y remarquera que les termes qui contiennent les puiſſances paires de r ſont toujours négatifs quelque ſigne qu'on ſuppoſe à l'excès ou défaut r dans la puiſſance imparfaite propoſée.

Au contraire le ſigne $\pm$ qui affecte les puiſſances impaires de r déſigne que quand r ſera poſitif il faudra prendre le ſigne ſupérieur $+$, & que le ſigne inférieur $-$ convient pour les cas où r eſt négatif.

Par conſéquent lorſque r ſera négatif, tous les termes qui le contiennent (c'eſt-à-dire tous excepté le premier x où r ne ſe trouve point) ſeront négatifs.

Quand r ſera poſitif, tous les termes de la ſuite dans leſquels r ſe trouve contenu ſeront alternativement poſitifs & négatifs à commencer par le ſecond terme de la ſuite qui eſt le premier qui contienne r.

On voit encore dans ces formules que r croît d'une dimenſion à chaque terme dans l'ordre de la ſuite naturelle des nombres 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. &c. enſorte que dans un terme quelconque dont le numero ſeroit n, le numérateur r auroit pour expoſant $n-1$, par conſéquent en ajoûtant l'unité à l'expoſant de r dans un terme quelconque, on aura le numero de ce terme.

x & ſes puiſſances ſeront dans les dénominateurs en telle ſorte que d'un terme à l'autre l'expoſant de x ſera augmenté de la quantité n, par exemple le premier contiendra $x = \frac{x}{1}$, le ſecond $\frac{xr}{x^n} = \frac{1r}{x^{n-1}}$, & dans les ſuivans, on aura x^{2n-1}, x^{3n-1}, x^{4n-1}, &c. ces expoſans formeront donc une ſuite infinie $n-1$, $2n-1$, $3n-1$, $4n-1$, $5n-1$, &c.

Enfin le coëfficient de chaque terme ſera formé du coëfficient du terme précédent multiplié par l'expoſant de x dans le terme précédent pris en ſens contraire, & diviſé par la partie poſitive de l'expoſant que x a dans le terme actuel auquel on veut donner un coëfficient, par exemple dans la derniere de ces formules, le dixiéme terme contient x^{9n-1} dont l'expoſant $9n-1$ pris en ſens contraire ou négativement ſera $1-9n$. Donc pour avoir le coëfficient du onziéme terme on prendra celui du dixiéme, on le multipliera par $1-9n$, & on diviſera le produit par $10n$ qui eſt la partie poſitive de l'expoſant $10n-1$ qui affecte x dans ce onziéme terme.

Quelque puisse être le rapport inconnu de x à r, on voit bien que les termes fractionnaires décroissent à l'infini, & si l'on suppose x plus grand que l'unité quelque valeur finie qu'on suppose à r, ces termes décroîtront tellement qu'on n'aura pas besoin de pousser l'approximation fort loin pour parvenir à des fractions si petites qu'on pourra négliger le surplus sans erreur sensible.

Comme il est naturel de faire tomber l'erreur sur la moindre partie, si l'on connoît quelle est celle des lettres qui exprime la plus grande des quantités qui entrent dans la composition de la puissance imparfaite proposée, & que cette lettre se trouve élevée dans quelque terme à la puissance dont on demande la racine, on ne manquera pas de mettre ce terme au nombre de ceux qu'on fera répondre à x^n.

Par exemple, si l'on demande la racine troisiéme de la quantité $8a^3+9a^2b+9ab^2+27b^3$, & qu'on sache $b>a$, on prendra dans les termes qu'on fera répondre à x^3, le cube $27b^3$ par préference au cube $8a^3$, & supposant $27b^3+9ab^2+9a^2b+8a^3=x^3+r$, on aura $x=3b+a$, & par conséquent $x^3=27b^3+27ab^2+9a^2b+a^3$, & $r=7a^3-18ab^2$ dont on cherchera la racine approchée par le moïen de la seconde des suites qu'on a données ci-devant (217).

Si outre cet avantage on avoit encore celui de connoître le rapport des quantités qui entrent dans la composition de la puissance imparfaite proposée, on réduiroit toutes ces quantités à une seule sur laquelle on opéreroit selon quelqu'une des méthodes précédentes.

Par exemple, si l'on demandoit la racine cubique de $8s^3+36s^2z+64sz^2+27z^3$ qui contient le cube de $2s+3z$ avec un reste $+10sz^2$, & qu'on sache que $z=10s$, on pourra mettre $1000s^3$, $100s^2$, $10s$, à la place de z^3, z^2, z, & on aura la quantité proposée transformée en $27008s^3+360s^3+6400s^3$ qui ne contient point de z & qui sera $=33768s^3$. On cherchera (213) la racine cubique approchée de 33768, on multipliera cette racine par s, & le résultat sera la racine demandée de la puissance imparfaite proposée.

Si on avoit fait évanouir s & ses puissances en mettant $\frac{z^3}{1000}$, $\frac{z^2}{100}$, $\frac{z}{10}$, à la place de s^3, s^2, s, on auroit eu $27z^3+\frac{8z^3}{1000}+\frac{36z^3}{100}+\frac{64z^3}{10}=\frac{33768z^3}{1000}$, on auroit cherché comme dans l'article précédent la racine cubique du numérateur qu'on auroit multipliée par $\frac{z}{10}$ qui est la racine exacte de $\frac{z^3}{1000}$.

Si l'on demande la racine carrée de la quantité $4a^2+16b^2+36c$ qui eſt la ſomme de trois carrés dans laquelle on fait que $a=3b$, & que $b=5c$, il eſt clair que ſi l'on ne veut point avoir de fraction, il faudra convertir les a & b en $15c$ & $5c$, c'eſt-à-dire qu'il faudra laiſſer ſubſiſter la plus petite de ces trois quantités, on mettra donc $225c^2$ pour a^2, & $25c^2$ pour b^2, ce qui donnera $4a^2+16b^2+36c^2=900c^2+400c^2+36c^2=1336c^2$. On cherchera la racine approchée de 1336, & on la multipliera par c.

Si connoiſſant les rapports des quantités qui entrent dans la compoſition, on connoît encore la valeur d'une de ces quantités, il eſt clair que l'opération ſe réduira à l'extraction d'une puiſſance numérique imparfaite, qu'on fera comme nous l'avons enſeigné (211, 212 & 213), & la racine qu'on trouvera ſera la racine demandée.

Si la quantité propoſée ne peut être réduite par aucun des calculs que nous venons d'expoſer, c'eſt-à-dire, 1°. ſi on ne connoît ni la valeur d'une des lettres qui la compoſent ni le rapport qui eſt entre elles; 2°. ſi elle ne contient aucun terme élevé au degré dont on demande la racine, & 3°. ſi elle ne contient aucun diviſeur qui ſoit une puiſſance parfaite du degré de la racine qu'on veut avoir. On ne pourra approcher de la racine demandée que par le moïen d'une autre ſuite infinie que nous donnerons (comme nous l'avons déja dit) après le calcul des expoſans.

Du Calcul des Radicaux.

En calculant les grandeurs algébriques, on en rencontre ſouvent d'incommenſurables, ſur leſquelles on eſt obligé d'opérer comme ſur les rationnelles : mais on ne doit ou on ne veut pas toujours en repréſenter les racines par des ſuites. C'eſt pourquoi nous examinerons la nature de ces quantités pour reconnoître comment on peut les ajoûter, les ſouſtraire, les multiplier, les diviſer, les élever aux puiſſances & en extraire les racines. Pour y parvenir nous commencerons par examiner les préparations par leſquelles on peut les amener au calcul des grandeurs commenſurables.

En général on indiquera une extraction quelconque d'une quantité en mettant au-deſſus de cette quantité le ſigne $\sqrt{}$ affecté de l'expoſant qui exprime le degré de la racine cherchée. Ainſi pour repréſenter la racine carrée de $a+b$, on écrira $\sqrt[2]{a+b}$, ou plûtôt $\sqrt{a+b}$, parce qu'on ſous-entend toujours l'expoſant 2 à un radical ſans ex-

posant. De même $\sqrt[3]{2m+3s}$ indique la racine troisiéme de $2m+3s$, & en général $\sqrt[m]{p+s}$, indique la racine du degré m de $p+s$.

Des Opérations accessoires.

219 On réduira une grandeur commensurable à une expression radicale sans en changer la valeur, en élevant cette grandeur à la puissance de même degré que l'exposant du radical auquel on veut la réduire, & mettant cette puissance sous le radical affecté de l'exposant proposé auquel on a élevé la puissance.

$$8=\sqrt{64}=\sqrt[3]{512}\ ;\quad 5=\sqrt{25}=\sqrt[3]{125}\ ;\quad \tfrac{2}{3}=\sqrt{\tfrac{4}{9}}=\sqrt[3]{\tfrac{8}{27}}\ ;$$

$$\tfrac{3}{4}=\sqrt{\tfrac{9}{16}}=\sqrt[3]{\tfrac{27}{64}}\ ;\quad ab=\sqrt{a^2b^2}=\sqrt[3]{a^3b^3}=\sqrt[n]{a^nb^n}\ ;$$

$$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{aa}{bb}}=\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}=\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}.$$

DÉMONSTRATION.

Le signe $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[n]{\ }$, est un signe convenu pour désigner la racine seconde, la racine troisiéme, la racine du degré n de la quantité qui lui est soumise, & comme les quantités supposées dans cet article sont des puissances parfaites de même degré que l'exposant des radicaux sous lesquels elles sont comprises, on en pourra extraire les racines indiquées, qui ne différeront pas des grandeurs proposées. Car on aura $\sqrt[n]{a^nb^n}=ab$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

220 Réciproquement lorsque la quantité soumise au radical sera une puissance parfaite de même degré que l'exposant du radical, on pourra extraire la racine indiquée par cet exposant, & on effacera le signe radical.

Ainsi $\sqrt{64}=8$, $\sqrt[3]{512}=8$, $\sqrt{\tfrac{4}{9}}=\tfrac{2}{3}$, $\sqrt[3]{\tfrac{8}{27}}=\tfrac{2}{3}$,

$$\sqrt{a^2b^2}=ab,\quad \sqrt[3]{a^3b^3}=ab,\quad \sqrt[n]{a^nb^n}=ab,$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b},\quad \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}}=\frac{a}{b},\quad \sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{a}{b}.$$

DÉMONSTRATION.

Puiſque nous ſuppoſons que les quantités qui ſont ſous les radicaux ſont des puiſſances parfaites, on en pourra extraire les racines & par conſéquent $ab = \sqrt[n]{a b^n}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

221 On pourra réduire un radical à un expoſant plus petit que le ſien lorſque ſon expoſant pourra être diviſé par l'expoſant du radical auquel on veut le réduire, & que l'on pourra extraire de ſa puiſſance une racine dont le degré ſoit égal au quotient de la diviſion de ces deux expoſans.

Ainſi $\sqrt[6]{256} = \sqrt[3]{16}$, $\sqrt[8]{\frac{729}{1024}} = \sqrt[4]{\frac{27}{32}}$, $\sqrt[9]{a^6b^3} = \sqrt[3]{a^2b}$;

$$\sqrt[8]{\frac{a^4}{b^6}} = \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^3}}, \quad \sqrt[mn]{a^m b^{xm}} = \sqrt[n]{ab^x}, \quad \sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^{xm}}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^x}}.$$

DÉMONSTRATION.

En diviſant l'expoſant 6, 8, 9, *mn*, du radical par 2, 3, *m*, on éleve la puiſſance qui lui eſt ſoumiſe au carré, au cube ou à une puiſſance quelconque *m* : mais comme on extrait en même tems de cette puiſſance la racine ſeconde, ou la racine troiſiéme ou la racine du degré *m*, il eſt évident qu'on ne change que l'expreſſion de la quantité radicale ſans en changer la valeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

222 On pourra toujours réduire un radical à un expoſant plus grand que le ſien pourvu que l'expoſant auquel on veut le réduire ſoit multiple du premier expoſant, en élevant la quantité ſoumiſe au radical à un degré marqué par le quotient de la diviſion de ce nouvel expoſant par le premier expoſant propoſé.

Ainſi $\sqrt{3} = \sqrt[4]{9} = \sqrt[6]{27} = \sqrt[8]{81}$, $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{\frac{4}{9}} = \sqrt[6]{\frac{8}{27}} = \sqrt[8]{\frac{16}{81}}$,

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[6]{a^2b^2} = \sqrt[9]{a^3b^3}, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[mn]{a^m b^m},$$

$$\sqrt[2]{\frac{a}{b}} = \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt[8]{\frac{a^4}{b^4}}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}.$$

DÉMONSTRATION.

DÉMONSTRATION.

En multipliant par 2, par 3, ou par m, l'exposant d'un radical quelconque, on extrait ou (pour parler plus exactement) on indique l'extraction d'une racine seconde, ou troisiéme, ou du degré m de la puissance; mais comme on rétablit cette valeur en élevant cette grandeur à une puissance du même degré 2 ou 3 ou m, il est encore évident qu'on change l'expression de la quantité radicale sans en changer la valeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

223 On pourra réduire plusieurs radicaux à un même exposant plus petit qu'aucun des exposans des radicaux proposés.

Si l'exposant auquel on veut réduire est diviseur commun des exposans proposés, & si l'on peut extraire de chaque grandeur radicale en particulier une racine d'un degré égal au quotient de la division de l'exposant actuel du radical auquel cette grandeur est soumise par l'exposant du radical auquel on veut la réduire.

Ainsi si l'on a les radicaux $\sqrt[8]{256}$, $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[4]{36}$, qu'on veut réduire au radical $\sqrt[2]{}$ ou $\sqrt{}$, comme 8, 6 & 4, peuvent se diviser par 2, & que l'on peut prendre la racine $4 = \frac{8}{2}$ de 256, la racine $3 = \frac{6}{2}$ de 125, & la racine $2 = \frac{4}{2}$ de 36, on aura $\sqrt[8]{256} = \sqrt{4}$ $\sqrt[6]{125} = \sqrt{5}$, $\sqrt[4]{36} = \sqrt{6}$, & les radicaux proposés deviendront $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, qui leur sont égaux.

De même les radicaux $\sqrt[mn]{a^m}$, $\sqrt[pn]{b^p}$, $\sqrt[qn]{c^q}$, réduits à des radicaux qui aïent le même exposant n, deviendront $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{q}$; car $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$, $\sqrt[pn]{b^p} = \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[qn]{c^q} = \sqrt[n]{c}$.

DÉMONSTRATION.

On ne fait dans cette opération autre chose qu'étendre à plusieurs radicaux, ce qu'on a pratiqué sur un seul dans l'article 221. Donc on change les expressions des radicaux sans changer leurs valeurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

224 On pourra réduire plusieurs radicaux d'exposans différens au plus petit exposant des radicaux proposés, si ce plus petit exposant est aliquote des autres, & si l'on peut extraire de chaque puissance en particulier la racine d'un degré égal au quotient de la division de l'exposant de son radical par l'exposant du radical auquel on veut le réduire.

Soient les radicaux $\sqrt[8]{256}$, $\sqrt[4]{36}$, $\sqrt{5}$; pour réduire les deux premiers, à avoir un radical comme le troisiéme dont l'exposant est 2, divisant 8 par 2, le quotient 4 indique qu'il faut prendre la racine quatriéme de 256 ou $\sqrt[4]{256} = 4$; Donc $\sqrt[8]{256} = \sqrt{4}$; & divisant 4 par 2, on prendra la racine seconde de 36 ou 6 pour la puissance du radical réduit, c'est-à-dire, que $\sqrt[4]{36} = \sqrt{6}$, & le dernier radical $\sqrt{5}$ restant le même, les trois radicaux proposés réduits comme on l'a desiré seront $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$.

De même les radicaux $\sqrt[mn]{a^m}$, $\sqrt[pn]{b^p}$, $\sqrt[n]{c}$, seront $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$.

DÉMONSTRATION.

Cette réduction est la même que la précédente à l'égard des radicaux que l'on réduit, & comme celui qu'on ne réduit pas ne change ni de valeur ni d'expression, il est clair qu'aucun d'eux ne change de valeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

225 On pourra toujours réduire plusieurs radicaux d'exposans différens à un même exposant plus grand qu'aucun de ceux des radicaux proposés, en multipliant les exposans les uns par les autres, & donnant le produit pour exposant commun à chaque radical, & élevant chaque puissance en particulier à un degré égal au nombre de fois que l'exposant de son radical est contenu dans l'exposant auquel on le réduit.

Ainsi $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[3]{4}$ deviendront $\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[6]{16}$; $\sqrt[3]{ab}$, $\sqrt[4]{cd}$ deviendront $\sqrt[12]{a^4b^4}$, $\sqrt[12]{c^3d^3}$; $\sqrt[2]{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ deviendront $\sqrt[6]{\frac{8}{27}}$, $\sqrt[6]{\frac{9}{16}}$; enfin $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$ deviendront $\sqrt[mnpq]{a^{mpq}}$, $\sqrt[mnpq]{b^{npq}}$, $\sqrt[mnpq]{c^{mnq}}$, $\sqrt[mnpq]{d^{mnp}}$.

DÉMONSTRATION.

Cette réduction n'est que l'extension à plusieurs radicaux de ce que dans l'article 222 on a expliqué pour un seul radical : ainsi les radicaux réduits de cette maniere changent d'expressions sans changer de valeurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

226 On pourra réduire plusieurs radicaux dont les exposans seront différens à un exposant commun égal au plus grand des exposans des radicaux proposés, si ce plus grand exposant est multiple des autres, pourvû qu'on éleve en particulier chaque puissance à un degré égal au nombre de fois que son exposant est contenu dans celui auquel on le veut réduire.

Ainsi pour réduire $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{5}$, au même exposant radical $\sqrt[6]{\ }$, laissant le dernier tel qu'il est, on élevera la puissance 3 du premier au cube, & la puissance 4 du second au carré, & l'on aura $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{16}$.

De même $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[mn]{c}$, seront $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[mn]{b^n}$, $\sqrt[mn]{c}$.

DÉMONSTRATION.

Cette réduction n'est, à l'égard des radicaux que l'on réduit, qu'un cas particulier de l'article précédent, & puisque celui qu'on ne réduit pas ne change ni de valeur ni d'expression, aucun ne change de valeur. *Ce qu'il falloit démontrer.*

227 On a souvent besoin de réduire à l'unité le coëfficient quelconque d'un radical : c'est-à-dire, de faire ensorte que ce radical soit sans autre coëfficient que l'unité.

Pour cela, il faut élever le coëfficient du radical à la puissance marquée par l'exposant de ce radical, multiplier la quantité qui est déja sous le radical par cette puissance de son coëfficient, & affecter le produit du même radical sans coëfficient.

Par exemple, si l'on a la quantité $6\sqrt{5}$, on prendra le carré 36 du coëfficient 6, & multipliant la puissance 5 par 36, on aura pour la valeur de $6\sqrt{5}$, le radical $\sqrt{180}$ qui lui est égal, & qui n'a d'autre coëfficient que l'unité.

On aura de même $a\sqrt{c} = \sqrt{a^2c}$, $ab\sqrt{m} = \sqrt{a^2b^2m}$.

$$\frac{1}{3}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \frac{2}{3}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{28}{9}},$$

$$\frac{a}{b}\sqrt{m} = \sqrt{\frac{a^2m}{b^2}}, \quad \frac{1}{a}\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{ab}{aa}} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Et en général $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$, $\frac{a}{c}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a^nb}{c^n}}$.

Démonstration.

Soit $a\sqrt[n]{b} = x$, divisant par a ces deux quantités égales $x = a\sqrt[n]{b}$, on aura $\frac{x}{a} = \sqrt[n]{b}$, élevant chacune à la puissance du degré n, cette expression $\frac{x}{a} = \sqrt[n]{b}$, deviendra $\frac{x^n}{a^n} = b$, multipliant par a^n elle deviendra $x^n = a^nb$, enfin tirant la racine du degré n, on trouve $x = \sqrt[n]{a^nb}$; mais nous avons supposé $x = a\sqrt[n]{b}$. Donc $\sqrt[n]{a^nb} = a\sqrt[n]{b}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

228. On pourra réduire un radical au plus simple exposant qu'il puisse recevoir lorsque son exposant ne sera pas une quantité primitive, & que la puissance qui est sous le radical sera telle qu'on en pourra extraire une racine d'un degré égal au quotient de la division de l'exposant du radical proposé par l'exposant du radical auquel on veut le réduire.

Cette réduction n'est qu'un cas de l'article 223 ou 224.

229. *Pour réduire un radical au plus simple terme possible.*

On commencera par réduire son exposant à sa plus simple expression possible (228), si après cette réduction, la quantité qui est sous le radical se trouve une puissance parfaite de même degré que l'exposant du radical, on en extraira la racine, & le radical s'évanouira.

Si cette quantité après la réduction de l'exposant ne se trouve pas une puissance parfaite de même degré que la racine indiquée, on tâchera de la diviser par quelqu'un de ses diviseurs qui soit une puis-

sance parfaite du degré du radical, en prenant la plus grande qui pourra s'y trouver contenue, & lorsque cette division se fera exactement, le quotient qui en résultera sera la puissance du radical réduit qui ne changera pas d'exposant, & multipliant le précédent coëfficient du radical proposé par la racine de la puissance par laquelle on aura divisé la quantité qui lui est soumise, le produit sera le coëfficient de ce radical réduit. Donc cette racine elle-même sera le coëfficient du radical réduit, si le radical proposé n'a pas d'autre coëfficient que l'unité ; car le produit d'une grandeur quelconque par l'unité est cette grandeur même.

Par exemple, on réduira $3\sqrt{108}$ en divisant la puissance 108 par le plus grand carré qui puisse la diviser exactement, & comme ce plus grand carré sera 36, parce que $108 = 36 \times 3$, on divisera 108 par 36, & le quotient 3 sera la puissance du radical réduit, dont le coëfficient sera le produit de 6, $\sqrt{36}$ par 3 coëfficient du radical proposé. On aura donc $3\sqrt{108} = 3\sqrt{36 \times 3} = 6 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

De même si l'on veut réduire $\sqrt[3]{108}$ à sa plus simple expression, on remarquera que 27 est le plus grand cube qui puisse exactement diviser $108 = 27 \times 4$, on aura donc $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$.

En général $a\sqrt[n]{a^n c} = aa\sqrt[n]{c}$, $a\sqrt[n]{b^n c} = ab\sqrt[n]{c}$, $p^m\sqrt[n]{a^n b} = ap^m\sqrt[n]{b}$.

DÉMONSTRATION.

La réduction expliquée dans cet article est l'inverse de celle de l'article 227. D'ailleurs on peut la démontrer directement en cette sorte.

Soit $x = a\sqrt[n]{b^n c}$, divisant par a, on aura $\frac{x}{a} = \sqrt[n]{b^n c}$, élevant ces deux grandeurs égales à la puissance n, elles deviendront $\frac{x^n}{a^n} = b^n c$, multipliant par a^n, on aura $x^n = a^n b^n c$, ou $x^n = a^n b^n \times c$, & tirant la racine du degré n, on aura $x = ab\sqrt[n]{c}$: mais nous avons supposé $x = a\sqrt[n]{b^n c}$: Donc $a\sqrt[n]{b^n c} = ab\sqrt[n]{c}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Lorsque dans un calcul on a des radicaux dont les puissances sont des entiers, mêlés à des radicaux dont les puissances sont des fractions,

il est plus commode de réduire les derniers à l'expression des autres; ce qu'il est toujours possible de faire.

230 Pour réduire un radical dont la puissance est une fraction à un autre radical de même degré dont la puissance soit un entier.

1°. On divisera le coëfficient du radical par le dénominateur de la fraction qui forme sa puissance, & ce quotient sera le coëfficient du radical réduit.

2°. On élevera ce dénominateur à une puissance moindre d'un degré que l'exposant du radical, & multipliant le numérateur par cette puissance; ce produit sera la puissance du radical réduit.

$$\text{Ainsi } \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{12}, \quad \sqrt[3]{\tfrac{5}{6}} = \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{180},$$

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt{mn}, \quad \sqrt[3]{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[3]{mn^2}, \quad a\sqrt[4]{\frac{m}{n}} = \frac{a}{n}\sqrt[4]{mn^3},$$

$$\text{Et en général } q\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{q}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}}.$$

DÉMONSTRATION.

Soit $x = q\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, multipliant cette expression d'égalité par b elle deviendra $bx = bq\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, divisant celle-ci par q, on aura $\frac{bx}{q} = b\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$: mais en réduisant à l'unité le coëfficient b de ce dernier radical (227), on aura $b\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{ab^n}{b}}$, qui à cause du diviseur b commun aux deux termes de la fraction qui est sous le radical, deviendra $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$, par conséquent (*ax.* 11) $\frac{bx}{q} = \sqrt[n]{ab^{n-1}}$. Multipliant ces deux quantités égales par q, on aura $bx = q\sqrt[n]{ab^{n-1}}$,

& divisant par b ; $x=\frac{q}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}}$; mais nous avons supposé $x=q\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Donc $q\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{q}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On rencontre assez souvent des incommensurables précédés de plusieurs signes radicaux, qu'il faut réduire à un seul.

231 Pour réduire un radical composé à un radical simple.

1°. On multipliera tous les exposans des radicaux les uns par les autres, & leur produit sera l'exposant du radical réduit.

2°. On élevera chaque puissance au degré marqué par le produit des exposans de tous les radicaux dont cette puissance est suivie.

3°. On multipliera toutes ces nouvelles puissances les unes par les autres, & leur dernier produit sera la puissance du radical réduit.

Ainsi l'expression $\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt[4]{c}}}$ deviendra $\sqrt[24]{a^{12}b^4c}$.

L'expression $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[s]{c}}}$ deviendra $\sqrt[mns]{a^{ns}b^sc}$.

Et l'expression $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c\sqrt[q]{d\sqrt[s]{f\sqrt[t]{g}}}}}}$ deviendra $\sqrt[mnpqst]{a^{npqst}b^{pqst}c^{qst}d^{st}f^tg}$.

DÉMONSTRATION.

Soit $x=\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[s]{c}}}$, élevant chaque grandeur à la puissance m, on aura $x^m = a\sqrt[n]{b\sqrt[s]{c}}$; élevant ces nouvelles quantités à la puissance n, elles deviendront $x^{mn}=a^nb\sqrt[s]{c}$, enfin si l'on éleve encore celles-ci à la puissance du degré s, on aura $x^{mns} = a^{ns}b^sc$, & tirant la racine du degré mns, $x=\sqrt[mns]{a^{ns}b^sc}$. Mais nous avons supposé $x=\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[s]{c}}}$. Donc $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[s]{c}}} = \sqrt[mns]{a^{ns}b^sc}$.

232 Pour réduire un radical dont la puissance est une fraction qui a pour dénominateur une grandeur incommensurable, à un radical dont la puissance soit une fraction qui ait pour dénominateur une grandeur commensurable.

1°. On élevera le numérateur commensurable à la puissance marquée par l'exposant du radical qui se trouve au dénominateur incommensurable, & cette puissance du numérateur sera le numérateur de la fraction réduite.

2°. On élevera à la même puissance le coëfficient de cet incommensurable, & multipliant ce coëfficient ainsi élevé, par la quantité qui est sous le signe radical du dénominateur, effaçant le signe radical qui les sépare, le produit sera le dénominateur de la fraction réduite.

3°. Enfin on multipliera l'exposant du premier radical par l'exposant du radical de son dénominateur, & ce produit sera l'exposant du radical réduit.

Ainsi l'on aura $\sqrt[3]{\frac{4}{3\sqrt{5}}} = \sqrt[6]{\frac{16}{9\times 5}} = \sqrt[6]{\frac{16}{45}}$.

Et en général $\sqrt[m]{\frac{a}{b\sqrt[n]{c}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^n c}}$.

DÉMONSTRATION.

Soit $x = \sqrt[m]{\frac{a}{b\sqrt[n]{c}}}$, élevant chacune de ces grandeurs algébriques supposées égales à la puissance m, on aura $x^m = \frac{a}{b\sqrt[n]{c}}$, multipliant par $\sqrt[n]{c}$, $x^m \sqrt[n]{c} = \frac{a}{b}$; élevant cette derniere expression à la puissance n, elle devient $x^{mn} c = \frac{a^n}{b^n}$; divisant par c, on a $x^{mn} = \frac{a^n}{b^n c}$; enfin tirant la racine du degré mn, on trouve $x = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^n c}}$, mais nous avons supposé $x = \sqrt[m]{\frac{a}{b\sqrt[n]{c}}}$. Donc $\sqrt[m]{\frac{a}{b\sqrt[n]{c}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^n c}}$.

233. On pourra par des opérations ſemblables faites ſur le numérateur incommenſurable d'une fraction affectée d'un radical, réduire ce radical en un autre qui ait pour puiſſance une fraction dont le numérateur ſoit une grandeur commenſurable. Pour cela,

1°. On élevera le dénominateur à la puiſſance marquée par le degré de l'expoſant du radical qui ſe trouve au numérateur, & cette puiſſance ſera le dénominateur de la fraction réduite.

2°. On élevera le coëfficient du radical du numérateur à la même puiſſance, & le produit de cette puiſſance par la grandeur qui eſt ſous le ſigne dont elle ſera délivrée, ſera le numérateur de la fraction réduite.

3°. Enfin on multipliera les expoſans des deux radicaux l'un par l'autre, & leur produit ſera l'expoſant du radical réduit.

Par exemple $\sqrt{\frac{2\sqrt[3]{5}}{6}} = \sqrt[6]{\frac{8 \times 5}{216}} = \sqrt[6]{\frac{40}{216}} = \sqrt[6]{\frac{5}{27}}$.

Et en général $\sqrt[m]{\frac{b\sqrt[n]{a}}{c}} = \sqrt[mn]{\frac{b^n a}{c^m}}$.

DÉMONSTRATION.

Soit fait $x = \sqrt[m]{\frac{b\sqrt[n]{a}}{c}}$, élevant chacune de ces deux quantités égales à la puiſſance du degré m, elles deviendront $x^m = \frac{b\sqrt[n]{a}}{c}$; multipliant celles-ci par c, on trouve $x^m c = b\sqrt[n]{a}$; élevant les dernieres à la puiſſance n, on a $x^{mn}c^n = b^n a$. Diviſant par c^n, $x^{mn} = \frac{b^n a}{c^n}$. Enfin tirant la racine du degré mn, on aura $x = \sqrt[mn]{\frac{b^n a}{c^n}}$. Mais nous avons ſuppoſé $x = \sqrt[m]{\frac{b\sqrt[n]{a}}{c}}$. Donc auſſi $\sqrt[m]{\frac{b\sqrt[n]{a}}{c}} = \sqrt[mn]{\frac{b^n a}{c^n}}$.

Ce qu'il falloit démontrer.

234 Enfin lorsqu'un radical aura pour puissance une fraction dont les deux termes seront incommensurables, on pourra le réduire à un radical qui ait pour puissance une fraction dont les termes soient tous deux commensurables. Pour y parvenir,

1°. On élevera chacun des coëfficiens des radicaux des deux termes de la fraction à la puissance marquée par le produit des exposans de ces deux radicaux.

2°. On élevera la quantité qui est sous le radical de chacun des deux termes de la fraction, réciproquement à la puissance marquée par le degré de l'autre radical.

3°. Enfin mettant ces puissances à la place de leurs racines, la fraction qui en résultera sera affectée d'un radical auquel on donnera pour exposant le produit des trois radicaux ; c'est-à-dire qu'en général, on aura $\sqrt[p]{\frac{a\sqrt[m]{c}}{b\sqrt[n]{d}}} = \sqrt[pmn]{\frac{a^{mn}c^n}{b^{mn}d^m}}$.

DÉMONSTRATION.

Soit $x=\sqrt[p]{\frac{a\sqrt[m]{c}}{b\sqrt[n]{d}}}$, élevant ces quantités qu'on suppose égales à la puissance du degré p, on aura $x^p=\frac{a\sqrt[m]{c}}{b\sqrt[n]{d}}$; divisant par a, & multipliant par b, $\frac{x^p b}{a}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[n]{d}}$, élevant cette derniere expression à la puissance du degré m, elle deviendra $\frac{x^{pm}b^m}{a^m}=\frac{c}{\sqrt[n]{d^m}}$, enfin élevant encore celle-ci à la puissance n, $\frac{x^{pmn}\,b^{mn}}{a^{mn}}=\frac{c^n}{d^m}$; à présent si l'on multiplie par a^{mn}, & qu'on divise en même tems par b^{mn}, on aura la nouvelle expression $x^{pmn}=\frac{a^{m.n}\,c^n}{b^{m.n}\,d^m}$, de laquelle tirant la racine du degré pmn, on aura pour résultat $x=\sqrt[pmn]{\frac{a^{mn}\,c^n}{b^{mn}d^m}}$. Et comme nous

avons supposé $x = \sqrt[p]{\dfrac{a\sqrt[m]{c}}{b\sqrt[n]{d}}}$, on aura aussi.

Donc $\sqrt[p]{\dfrac{a\sqrt[m]{c}}{b\sqrt[n]{d}}} = \sqrt[pmn]{\dfrac{a^{mn}c^{n}}{b^{mn}d^{m}}}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

235 Des grandeurs incommensurables en elles-mêmes peuvent être commensurables entre elles, & elles le seront toujours lorsqu'aïant la même puissance & le même exposant sur leurs signes, elles ne différeront que par leurs coëfficiens : ainsi $7\sqrt[3]{2}$, $5\sqrt[3]{2}$, $a\sqrt[3]{2}$ sont des grandeurs commensurables entre elles qui ont pour commune mesure $1\sqrt[3]{2}$.

Des grandeurs incommensurables en elles-mêmes peuvent être commensurables entre elles. Pour découvrir leurs rapports, on les réduira aux plus simples termes possibles, & par cette réduction elles deviendront commensurables entre elles; sinon elles seront incommensurables tant entre elles qu'en elles-mêmes. Par exemple $\sqrt[4]{\frac{400}{81}}$ & $\sqrt{\frac{45}{16}}$ étant réduits à leurs plus simples expressions seront les grandeurs $\frac{2}{3}\sqrt{5}$, $\frac{3}{4}\sqrt{5}$, commensurables entre elles.

236 Pour connoître autant qu'il est possible le rapport des grandeurs incommensurables tant entre elles qu'en elles-mêmes, on leur donnera un même exposant, & on réduira leurs coëfficiens à l'unité.

Par exemple, si l'on veut découvrir le rapport des deux radicaux $3\sqrt{15}$, $4\sqrt{10}$, qui ont le même exposant, en réduisant leurs coëfficiens à l'unité, on aura $\sqrt{125}$, $\sqrt{160}$, dont le dernier est visiblement le plus grand.

Des Opérations principales.

Les opérations principales ne diffèrent presque pas des opérations semblables sur les grandeurs commensurables; c'est pourquoi nous nous dispenserons de donner les démonstrations de celles-ci, attendu que les précédentes peuvent s'y appliquer.

DE L'ADDITION.

237 Pour ajouter ensemble plusieurs radicaux, on les réduira à leurs plus simples termes s'ils n'y sont pas déja, & si après cette réduction ils s'en trouve qui soient commensurables entre eux, on les réduira en un seul auquel on donnera pour coëfficient la somme de leurs coëfficiens.

Ceux qui ne seront pas commensurables avec les autres, seront ajoutés à leur suite avec leurs propres signes.

Ainsi pour ajouter ensemble les deux radicaux $\sqrt[3]{243}$ & $\sqrt[6]{81}$, en les réduisant à leurs plus simples termes, on trouvera qu'ils sont commensurables entre eux, & que leurs valeurs $3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9}=4\sqrt[3]{9}$.

De même si l'on a $a\sqrt{b}$, $c\sqrt{b}$, $d\sqrt{b}$, $\sqrt{b}$, en les ajoûtant leur somme sera $(a+c+d+1)\sqrt{b}$.

Dans tout autre cas on ne pourra qu'indiquer l'addition; par exemple $+a\sqrt{b}$, $+d\sqrt{c}$, $-m\sqrt{pq}$, $-n\sqrt{xy}$, étant ajoutés, donneront pour somme $a\sqrt{b}+d\sqrt{c}-m\sqrt{pq}-n\sqrt{xy}$.

Les radicaux fractionnaires $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $c\sqrt{\frac{a}{b}}$, $3\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{d}{m}\sqrt{\frac{a}{b}}$, donneront pour leur somme $\left(4+c+\frac{d}{m}\right)\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Mais les radicaux fractionnaires $+a\sqrt{\frac{m}{n}}$, $-b\sqrt{\frac{p}{q}}$, $+\sqrt{\frac{m}{q}}$, $-\sqrt{\frac{p}{n}}$, n'auront point d'autre expression de leur somme que $a\sqrt{\frac{m}{n}}-b\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{m}{q}}-\sqrt{\frac{p}{n}}$.

DE LA SOUSTRACTION.

238 Pour soustraire un radical d'un autre radical, on les réduira tous deux à leurs plus simples expressions, s'ils n'y sont pas déja réduits; & si après cette réduction ces deux radicaux se trouvent commensurables entre eux, on prendra pour leur différence celle de leurs coëfficiens.

Ainsi pour soustraire du radical $\sqrt[3]{243}$ le radical $\sqrt[6]{81}$, en les réduisant aux plus simples termes, on aura $3\sqrt[3]{9}$ & $\sqrt[3]{9}$, dont la différence est $3\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{9}$.

De même $4\sqrt{a}-3\sqrt{a}=\sqrt{a}$, $6\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}=8\sqrt{ab}$ &c.

Quand les radicaux proposés ne sont point commensurables entre eux, on ne peut les soustraire qu'en écrivant le soustracteur à la suite du soustréande en changeant le signe du soustracteur. Si de $+2\sqrt[3]{a^2+b}$, on veut retrancher $+3\sqrt{a}$, on aura $2\sqrt[3]{a^2+b}-3\sqrt{a}$. De $4\sqrt{mn+nn}$ retranchant $-3\sqrt{ax}$, la différence sera $4\sqrt{mn+n^2}$ $+3\sqrt{ax}$. Retranchant $+4\sqrt{\frac{a}{b}}$ de $+3\sqrt{\frac{m}{n}}$, la différence sera $3\sqrt{\frac{m}{n}}-4\sqrt{\frac{a}{b}}$. Retranchant $-a\sqrt{\frac{m}{n}}$ de $+p\sqrt{\frac{x}{y}}$, la différence sera $p\sqrt{\frac{x}{y}}+a\sqrt{\frac{m}{n}}$.

DE LA MULTIPLICATION.

239 On multipliera un radical par une grandeur commensurable en multipliant le coëfficient du radical par la grandeur commensurable.

$\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}\times 2=2\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}\times a=a\sqrt{\frac{1}{3}}$,

$\sqrt{a}\times 2=2\sqrt{a}$, $\sqrt{a}\times a=a\sqrt{a}=\sqrt{a^3}$, $\sqrt{\frac{1}{a}}\times m=m\sqrt{\frac{1}{a}}$.

240 Pour multiplier l'une par l'autre deux grandeurs incommensurables, il faut

1°. Leur donner même exposant si elles ne l'ont pas déja,

2°. Multiplier le coëfficient de l'une par le coëfficient de l'autre;

3°. Multiplier la puissance de l'une par la puissance de l'autre.

Ainsi $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$.

$$b\sqrt{\frac{a}{m}} \times d\sqrt{\frac{c}{n}} = bd\sqrt{\frac{ac}{mn}}, \quad \frac{p}{q}\sqrt{\frac{m}{n}} \times \frac{a}{b}\sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{ap}{bq}\sqrt{\frac{em}{dn}}.$$

$$a\sqrt{b} \times c\sqrt{b} = ac\sqrt{bb} = acb.$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{c^2}{n^2}} \times \frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{c^2}{n^2}} = \frac{2a}{3b}\sqrt[4]{\frac{c^4}{n^4}} = \frac{2ac}{3bn}.$$

Si l'une des deux puissances ou toutes deux sont des quantités polinomes, & si les radicaux sont précédés aussi de quantités commensurables de plusieurs termes le calcul sera plus long sans être plus difficile.

Multiplier	$a + \sqrt{ab}$	$\sqrt{ab} + \sqrt{bc}$
par	$b + \sqrt{bc}$	$\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$
produit	$ab + b\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac}$	$ab + b\sqrt{ac} + a\sqrt{bc} + c\sqrt{ab}$

Multipliant $\sqrt{a^2+b^2}$

par $\sqrt{a^2-b^2}$

produit $\sqrt{a^4+a^2b^2-a^2b^2-b^4} = \sqrt{a^4-b^4}$

Multipliant $a+\sqrt{a^2-b^2}$

par $a+\sqrt{a^2-b^2}$

$a^2+a\sqrt{a^2-b^2}$

$+a\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2$

le produit sera $a^2+2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2 = 2a^2-b^2+2\sqrt{a^2-b^2}$;

Multipliant $a+\sqrt{a^2-x^2}$

par $a+\sqrt{a^2-x^2}$

$a^2+a\sqrt{a^2-x^2}$

$+a\sqrt{a^2-x^2}-(a^2-x^2)$

le produit fera $a^2 \quad * \quad -a^2+x^2=x^2$

Multipliant $\sqrt{ab}+\sqrt{a^2-x^2}$

par $\sqrt{ab}+\sqrt{a^2-x^2}$

$ab+\sqrt{a^2b-abx^2}$

$+\sqrt{a^2b-abx^2}+a^2-x^2$

le produit fera $ab+2\sqrt{a^2b-abx^2}+a^2-x^2$

Multipliant $ac+b\sqrt{a^2-x^2}$

par $bc+c\sqrt{a^2-y^2}$

$abc^2+b^2c\sqrt{a^2-x^2}$

$+ac^2\sqrt{a^2-y^2}+bc\sqrt{a^4-a^2x^2-a^2y^2+x^2y^2}$

produit $abc^2+b^2c\sqrt{a^2-x^2}+ac^2\sqrt{a^2-y^2}+bc\sqrt{a^4-a^2x^2-a^2y^2+x^2y^2}$.

DE LA DIVISION.

241 Pour divifer un radical par une grandeur commenfurable, on divifera le coëfficient de ce radical par le divifeur commenfurable.

Par exemple, pour divifer $p\sqrt{ab}$ par c, le quotient fera $\frac{p}{c}\sqrt{ab}$.
Divifant $\sqrt{mn}$ par $\frac{1}{c}$, le quotient fera $c\sqrt{mn}$.

Divifant $a\sqrt{\frac{m}{n}}$ par b, le quotient fera $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{m}{n}}$.

Divifant $ab\sqrt{mn}$ par a, le quotient fera $b\sqrt{mn}$.

242 Pour diviser une grandeur commensurable par un radical,
1°. On peut diviser le dividende commensurable par le coëfficient du radical diviseur, & on prendra la puissance de ce radical pour dénominateur d'une fraction qui aura l'unité pour numérateur, & cette fraction sera la puissance du radical qui doit se trouver au quotient;

Car $\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{1\sqrt{a^2}}{b\sqrt{c}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2}{c}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{c}}$;

Donc $\frac{\left(\frac{1}{a}\right)}{b\sqrt{c}} = \frac{1}{ab}\sqrt{\frac{1}{c}}$; $\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{c\sqrt{a}} = \frac{m}{cn}\sqrt{\frac{1}{a}}$;

$$\frac{p}{\frac{1}{p}\sqrt{p^3}} = \sqrt{p}.$$

2°. Mais comme cette méthode rendra nécessairement fractionnaire la puissance de ce radical, on pourra laisser le radical tel qu'il se trouvera en divisant le dividende commensurable par le produit de son coëfficient & de sa puissance.

Ainsi $\frac{a}{b\sqrt{c}} = (1^\circ.)\ \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{c}}$, sera aussi $= \frac{a}{bc}\sqrt{c}$.

On aura de même $\frac{\left(\frac{1}{a}\right)}{b\sqrt{c}} = \frac{1}{abc}\sqrt{c}$; $\frac{\left(\frac{m}{n}\right)}{c\sqrt{a}} = \frac{m}{acn}\sqrt{a}$.

Pour diviser deux radicaux l'un par l'autre, 1°. On les réduira au même exposant; 2°. On divisera le coëfficient du dividende par le coëfficient du diviseur; 3°. On divisera la puissance du dividende par la puissance du diviseur.

Ainsi $a\sqrt{mn}$ divisé par $b\sqrt{m}$, sera $= \frac{a}{b}\sqrt{n}$.

$a\sqrt{mn}$ divisé par $b\sqrt{pq}$, sera $= \frac{a}{b}\sqrt{\frac{mn}{pq}}$.

$ab\sqrt{mn}$ divisé par $a\sqrt{m}$, donnera pour quotient $b\sqrt{n}$.

$a\sqrt{bc}$ divisé par $\sqrt{c} = a\sqrt{b}$ pour quotient.

$6a^2b\sqrt[3]{b}$ divisé par $2a\sqrt[3]{ab}$, donne pour quotient $3b\sqrt[3]{a^2}$.

Il

Il en sera de même si l'une des puissances ou toutes deux sont des polinomes, & si les radicaux sont précédés ou suivis de grandeurs commensurables d'un ou de plusieurs termes.

Si l'on veut diviser $ab + b\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac}$ par $a + \sqrt{ab}$; divisant ab par a, le premier terme du quotient sera b par lequel multipliant le quotient $a + \sqrt{ab}$, on retranchera du dividende le produit $ab + b\sqrt{ab}$.

Ensuite on divisera le premier terme $a\sqrt{bc}$ du reste par le premier terme a du diviseur, & multipliant le diviseur $a + \sqrt{ab}$ par le second terme $\sqrt{bc}$ du quotient, on soustraira du dividende le produit $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac}$, & comme il ne restera rien de part ni d'autre, le quotient exact est $b + \sqrt{bc}$.

$$\begin{array}{r|l} ab + b\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} & a + \sqrt{ab} \\ -ab - b\sqrt{ab} \qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{b + \sqrt{bc}} \\ \hline +a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} & \\ -a\sqrt{bc} - b\sqrt{ac} & \end{array}$$

On pourra de la même maniere faire d'autres opérations semblables, sans pour cela se donner la peine d'écrire les produits, en abrégeant comme nous avons fait pour la division algébrique.

Ainsi divisant $ab + b\sqrt{ac} + a\sqrt{bc} + c\sqrt{ab}$ par $\sqrt{ab} + \sqrt{bc}$, on aura pour quotient $\sqrt{ab} + \sqrt{bc}$.

Divisant $\sqrt{a^4 - b^4}$ par $\sqrt{a^2 + b^2}$, le quotient sera $\sqrt{a^2 - b^2}$.

De même aussi $\dfrac{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = a + \sqrt{a^2 - b^2}$.

$$\frac{x^2}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = a - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\frac{a^2 + ab - x^2 + 2\sqrt{a^2b - abx^2}}{\sqrt{ab} + \sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{ab} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\frac{abc^2 + b^2c\sqrt{a^2 - x^2} + ac^2\sqrt{a^2 - y^2} + bc\sqrt{a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 + x^2y^2}}{ac + b\sqrt{a^2 - x^2}} = bc + c\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Dans tous ces exemples, nous avons supposé que les radicaux avoient tous le même exposant ; mais il est évident que s'ils avoient des exposans différens, il faudroit les réduire à un même exposant, auparavant de tenter la division. Pour cet effet, on se servira de la méthode de réduction que nous avons donnée ci-devant (221 &c.).

DE L'EXALTATION.

244 Pour élever un radical à la puissance marquée par son exposant, il suffira d'effacer le signe radical, & de multiplier la quantité qui étoit dessous, par la puissance demandée du coëfficient.

Ainsi le carré de $2\sqrt{a}$ sera $4a$, le cube de $2\sqrt[3]{a}$ sera $8a$.

Le carré de $a\sqrt{b}$ sera a^2b, le cube de $a\sqrt[3]{b}$ sera a^3b.

En général la puissance du degré n du radical $b^m\sqrt[n]{a}$ sera $b^{m \times n}a$.

Par conséquent lorsque le radical n'aura pas d'autre coëfficient que l'unité, la destruction seule du signe suffira pour élever à la puissance demandée la quantité qui lui étoit soumise. Car $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$.

Donc $\sqrt{b}$ élevé au carré sera b, & une quantité quelconque $\sqrt[n]{\frac{a^x}{c^m}}$ étant élevée à la puissance du degré n, sera $\frac{a^x}{c^m}$.

245 Si l'on veut élever le radical à une autre puissance que celle qui est marquée par son exposant, il faut voir si l'exposant du radical peut être divisé par le degré de la puissance à laquelle on veut l'élever, & alors on divise cet exposant par le degré de la puissance demandée, & élevant le coëfficient à cette puissance demandée, on laisse sous le radical ainsi transformé la même quantité qui y étoit auparavant.

Ainsi le carré de $a\sqrt[4]{cd}$ sera $a^2\sqrt{cd}$.

Le cube de $a\sqrt[6]{mn}$ sera $a^3\sqrt{mn}$.

Le carré de $\frac{m}{n}\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ sera $\frac{m^2}{n^2}\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Le cube de $\frac{s}{x}\sqrt[6]{\frac{a}{c}}$ sera $\frac{s^3}{x^3}\sqrt{\frac{a}{c}}$.

Enfin la puissance du degré n du radical $\frac{a^x}{p^y}\sqrt[mn]{\frac{b^s}{q^z}}$ sera $\frac{a^{xn}}{p^{yn}}\sqrt[m]{\frac{b^s}{q^z}}$.

Car en tirant une racine dont le degré m est contenu dans la premiere un nombre de fois exprimé par n, la quantité soumise au radical est élevée au degré n, puisque l'on ne peut diviser l'exposant d'un radical sans élever la quantité qui lui est soumise.

246 Enfin lorsque l'exposant de la puissance n'est point aliquote de l'exposant du radical, il faut laisser le signe radical tel qu'il est, & élever à la puissance demandée le coëfficient, & la quantité qui est sous le radical.

Ainsi le carré de $a\sqrt[3]{c}$ sera $a^2\sqrt[3]{c^2}$.

Le cube de $m\sqrt{n}$ sera $m^3\sqrt{n^3}$.

Le carré de $\frac{m}{n}\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$ sera $\frac{m^2}{n^2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{c^2}}$.

Le cube de $\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ sera $\frac{a^3}{b^3}\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}$.

Enfin la puissance du degré m de la quantité $\frac{a^p}{c^q}\sqrt[n]{\frac{s^x}{p^y}}$ sera $\frac{a^{pm}}{c^{qm}}\sqrt[n]{\frac{s^{xm}}{p^{ym}}}$.

DE L'EXTRACTION.

247 Pour extraire d'un radical une racine quelconque, il faut examiner si le coëfficient du radical & la quantité qui lui est soumise sont des puissances parfaites du degré de la racine qu'on se propose d'extraire. Dans ce cas on extrait de ce coëfficient & de la puissance du radical la racine demandée qu'on affecte du même radical.

Par exemple la racine carrée de $4\sqrt[3]{a^2b^2}$ sera $2\sqrt[3]{ab}$.

La racine cubique de $8\sqrt[4]{a^6b^3}$ sera $2\sqrt[4]{a^2b}$.

La racine carrée de $\frac{16}{25}\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2}}$ sera $\frac{4}{5}\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$.

La racine cubique de $\frac{27}{64}\sqrt{\frac{m^6}{n^3}}$ sera $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{m}{n}}$.

La racine du degré n de la quantité $a^{mn}\sqrt[p]{x^{ny}}$ sera $a^{m}\sqrt[p]{x^{y}}$.

La racine du degré n de la quantité $\frac{a^{mn}}{x^{pn}}\sqrt[q]{\frac{s^{rn}}{c^{yn}}}$ sera $\frac{a^{m}}{x^{p}}\sqrt[q]{\frac{s^{r}}{c^{y}}}$.

248 Si le coëfficient & la puissance du radical ne sont pas chacun une puissance parfaite de même degré que la racine qu'on se propose d'en extraire, alors on réduit le coëfficient du radical à l'unité (227), & l'on multiplie son exposant par le degré de la racine proposée.

Ainsi la racine cube de $4\sqrt{a}$ sera $\sqrt[6]{16a}$.

La racine carrée de $3\sqrt[3]{ab}$ sera $\sqrt[6]{27ab}$.

La racine carrée de $a\sqrt[3]{n}$ sera $\sqrt[6]{a^3 n}$.

La racine cubique de $\frac{a}{c}\sqrt{\frac{m}{n}}$ sera $\sqrt{\frac{a^2 m}{c^2 n}}$.

La racine du degré n de $a\sqrt{p}$ sera $\sqrt[2n]{a^2 p}$.

Enfin la racine du degré n de la quantité $\frac{a^p}{c^q}\sqrt[m]{\frac{s^r}{x^y}}$ sera $\sqrt[mn]{\frac{a^{pm}s^{p}}{c^{qm}x^{y}}}$

On voit bien que si le radical n'a point d'autre coëfficient que l'unité, ne pouvant pas d'ailleurs extraire la racine demandée de la quantité qui est sous le signe, l'opération se réduira à multiplier son exposant par celui de la racine qu'on en veut extraire. Ainsi la racine carrée de $\sqrt[3]{a}$ sera $\sqrt[6]{a}$.

La racine cubique de $\sqrt[4]{a}$ sera $\sqrt[12]{a}$.

La racine du degré n de la quantité $\sqrt[m]{a^x}$ sera $\sqrt[mn]{a^x}$.

Du Calcul des Puissances par leurs Exposans.

Lorsque les quantités commensurables ou incommensurables qui sont l'objet du calcul sont des monomes, il est souvent plus com-

mode & plus simple de les calculer par leurs exposans, que d'y appliquer le calcul ordinaire ou celui des radicaux : parce qu'on a la commodité de calculer les fractions comme des entiers, & par conséquent de ne point admettre de fractions. Ce n'est pas qu'il n'y eut encore de l'avantage à calculer des polinomes fractionnaires par leurs exposans, mais il y auroit d'ailleurs l'inévitable inconvenient de multiplier chaque terme du polinome numérateur par chaque terme du polinome dénominateur, ce qui augmenteroit considérablement le nombre des termes, & rendroit le calcul plus embarassant. C'est pourquoi ce calcul ne s'emploïe ordinairement que pour calculer des monomes entiers ou fractionnaires, commensurables ou incommensurables.

249 Selon ce que nous avons vû (50), l'exposant fait voir que la quantité qui lui est soumise est multipliée par l'unité autant de fois successivement que cet exposant contient d'unités.

Ainsi l'unité multipliée n fois successivement par a donnera a^n. $1 \times a \times a \times a \times a \times a = a^5$; $1 \times a \times a \times a \times a = a^4$; $1 \times a \times a \times a = a^3$; $1 \times a \times a = a^2$; $1 \times a = a^1 = a$.

En divisant une puissance quelconque comme a^m par une autre puissance de la même quantité, telle que a^n, on a vû qu'il falloit soustraire l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende. Par conséquent $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

1°. Si l'on suppose que $n = m$, on aura $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-n} = a^{m-m} = a^0$; mais $\frac{a^m}{a^m} = \frac{1}{1} = 1$. Donc $a^0 = 1$.

250 Donc une quantité quelconque élevée à la puissance zéro, sera égale à l'unité. Car elle sera égale à une fraction dont les deux termes seroient égaux, & une telle fraction est égale à l'unité.

2°. Si $n = m + 1$, on aura $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+1}} = a^{m-m-1} = a^{-1}$; mais $\frac{a^m}{a^{m+1}} = \frac{1 \times a^m}{1 \times a^m \times a} = (74) \frac{1}{a}$. Donc $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

251 Donc une quantité quelconque élevée à une puissance négative est égale à une fraction qui a l'unité pour numérateur, & dont

le dénominateur est la quantité elle-même affectée du même exposant changé de négatif en positif.

Nous avons pareillement vû (173), que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, & en général $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; c'est-à-dire que pour extraire la racine quelconque n d'une quantité telle que a^m, il faudra diviser l'exposant m de la puissance par le degré n de la racine qu'on en veut extraire. Ainsi $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

252 Donc on pourra toujours changer un radical dont la puissance est un monome en une expression exponentielle, en prenant la puissance du radical pour la quantité soumise à l'exposant, & lui donnant pour exposant celui de la puissance du radical divisé par l'exposant du signe ; c'est-à-dire que $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[n]{a} =a^{\frac{1}{n}}$,

$$\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{a^{-1}}\ (251) = a^{-\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{3}},\quad \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}.$$

Et plus généralement encore $\sqrt[n]{\frac{a^m}{c^x}} = a^{\frac{m}{n}} c^{-\frac{x}{n}}$.

253 Réciproquement on pourra changer une quantité exponentielle dont la puissance est une fraction en une expression radicale ; en prenant la quantité soumise à l'exposant pour puissance du radical, le numérateur de la fraction qui exprime l'exposant, pour l'exposant de cette puissance, & le dénominateur pour exposant du signe radical.

On doit appliquer ici les exemples ci-dessus ; car on ne peut avoir $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ qu'on n'ait aussi $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

254 Donc on pourra éviter le calcul des fractions algébriques d'un seul terme & les réduire à des entiers monomes, en multipliant le numérateur de chacune par son dénominateur, & changeant les signes des exposans de ce dénominateur de + en —. Ainsi $\frac{a}{b} = ab^{-1}$, $\frac{a}{b^2} = ab^{-2}$, $\frac{a^m}{b^n} = a^m b^{-n}$; $\frac{a^m b^n c^x}{b^r y^z} = a^m b^{n-r} c^x y^{-z}$.

255 On peut donc avoir des exposans entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs selon la maniere & le nombre de fois qu'on a pris l'unité pour produire la quantité soumise à l'exposant.

Les exposans entiers désignent les puissances de la quantité qui y est soumise.

Les exposans fractionnaires en expriment les racines.

Les exposans positifs marquent des quantités entieres.

Les exposans négatifs indiquent des fractions.

Donc l'exposant entier positif indique la puissance d'un entier. $a^2 = 1 \times a \times a$, $a^3 = 1 \times a \times a \times a$, a^m est égal à l'unité multipliée m fois successivement par a.

L'exposant fractionnaire positif désigne la racine d'un entier.

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

L'exposant entier négatif marque la puissance d'une fraction.

$a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

L'exposant fractionnaire & négatif exprime la racine d'une fraction. $a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$, $a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}}$, $a^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a}}$, $a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$

Ces quantités étant comme toutes les autres susceptibles de plus & de moins, il est visible qu'on peut faire sur elles les mêmes opérations qu'on a pratiquées jusqu'ici sur les quantités qui ont été l'objet des calculs précédens.

On pourra donc les ajouter, les soustraire, les multiplier, les diviser, les exalter ou les élever aux puissances, & en extraire les racines.

DE L'ADDITION.

256 Pour ajouter ensemble les quantités exponentielles, on les écrit les unes à la suite des autres avec leurs propres signes, & s'il

se trouve des termes semblables, on réduit leur somme à sa plus simple expression.

Ainsi pour ajouter les quantités a^m, $+b^n$, $+c^x$, $-p^y q^z$, on écrira à l'ordinaire $a^m + b^n + c^x - p^y q^z$.

Ajoutant a^m à a^n, on aura pour somme $a^m + a^n$.

Pour ajouter a^n & $-2a^n$, on écrira $a^n - 2a^n = -a^n$.

Pour ajouter a^{-m} à b^{-n}, on écrira $a^{-m} + b^{-n}$.

$7a^3 + 4a^3 = \overline{7+4} \times a^3 = 11a^3$, $7a^{-3} + 4a^{-3} = \overline{7+4} \times a^{-3} = 11a^{-3}$.

Et en général $pa^n + qa^n = \overline{p+q} \times a^n$.

De même on aura $ab^{-1} + cd^{-1} + mn^{-1} - pq^{-1}$ pour la somme des quantités ab^{-1}, cd^{-1}, mn^{-1}, $-pq^{-1}$, égales aux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$, $-\frac{p}{q}$, sans se donner la peine de réduire ces fractions au même dénominateur pour avoir leur somme ainsi que nous avons fait (121).

On aura donc en général $a^n b^{-x} + p^m c^{-z}$ pour la somme des quantités $\frac{a^n}{b^x}$, $\frac{p^m}{c^z}$, réduites en grandeurs exponentielles.

DE LA SOUSTRACTION.

257 Pour soustraire une quantité exponentielle d'une autre quantité exponentielle ou d'une autre puissance de la même grandeur, il faut écrire le soustracteur après le soustréande en changeant le signe du soustracteur : & réduire la différence à sa plus simple expression quand on aura des termes semblables.

Ainsi pour soustraire $+a^n b^m$ de $p^x q^y$, on écrira $p^x q^y - a^n b^m$.

De $+p^n q^{-m} = +\frac{p^n}{q^m}$ soustraire $-x^r y^{-s} = -\frac{x^r}{y^s}$, on aura $p^n q^{-m} + x^r y^{-s}$.

Pour

$$\text{Pour soustraire}\left\{\begin{array}{lll} +a^n & \text{de} & +a^n \\ -a^n & \text{de} & +a^n \\ +a^n & \text{de} & -a^m \\ -a^m & \text{de} & +a^n \\ +4a^{\frac{3}{4}} & \text{de} & +7a^{\frac{3}{4}} \end{array}\right\}\text{on écrira}\left\{\begin{array}{l} a^n - a^n = 0 \\ a^n + a^n = 2a^n \\ -a^m - a^n \\ +a^n + a^m \\ 7a^{\frac{3}{4}} - 4a^{\frac{3}{4}} = 3a^{\frac{3}{4}} \end{array}\right.$$

Et en général $pa^n - qa^n = \overline{p-q} \times a^n$.

De même aussi pour soustraire $\pm \frac{a^n}{b^m}$ de $+\frac{p^x}{q^y}$ qu'on peut exprimer par les quantités $\pm a^n b^{-m}$, $+p^x q^{-y}$ qui leur sont égales, on aura $p^x q^{-y} \mp a^n b^{-m}$ pour leur différence.

DE LA MULTIPLICATION.

258 Pour avoir le produit de deux quantités exponentielles, on les écrira à l'ordinaire à la suite l'une de l'autre.

Ainsi $a^{-1} \times b^{-2} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ab^2} = a^{-1} b^{-2}$.

$$a^n b^{-m} \times p^x q^{-y} = \frac{a^n}{b^m} \times \frac{p^x}{q^y} = a^n b^{-m} p^x q^{-y}.$$

259 Si l'on demande le produit de deux puissances différentes d'une même grandeur a, il ne faut qu'écrire la même lettre une fois au produit, en lui donnant pour exposant la somme des exposans des deux produisans.

Ainsi $a^n \times a^m = a^{m+n}$, $a^n \times a^n = a^{2n}$, $a^n \times a^p = a^{p+n}$,

$a^p \times a^q = a^{p+q}$, $a^p \times a^{-q} = a^{p-q}$, $a^{-p} \times a^q = a^{-p+q}$,

$a^{-p} \times a^{-q} = a^{-p-q}$, $a^{\frac{p}{r}} \times a^{\frac{q}{s}} = a^{\frac{p}{r}+\frac{q}{s}} = a^{\frac{ps+qr}{rs}}$.

On aura donc pour expression générale $a^m \times a^{\pm n} = a^{m \pm n}$.

1°. Si l'on suppose $n = m$, on aura $a^{m+m} = a^{2m} = P\overline{a^m} = \overset{m}{P}\overline{a^2}$, & $a^{m-n} = a^{m-m} = a^0 = 1$. (250.)

2°. Si $n = cm$, c'est-à-dire, si n est un multiple de m, si n contient c fois m, on aura $a^{m+n} = a^{m+cm} = a^{\overline{c+1} \times m} = \overset{m}{P}\overline{a^{c+1}} = \overset{c+1}{P}\overline{a^m}$;

& $a^{m-n} = a^{m-cm} = a^{m \times \overline{1-c}} = \overset{m}{P}\overline{a^{1-c}} = \overset{m}{P}\overline{\frac{a}{a^c}} = \overset{1-c}{P}\overline{a^m}$.

3°. Si au contraire $m = cn$, c'est-à-dire, si n est une aliquote contenue c fois dans m, on aura $a^{m+n} = a^{m+\frac{m}{c}} = a^{cn+n} = a^{n \times \overline{c+1}} = \overset{n}{P}\overline{a^{c+1}} = \overset{c+1}{P}\overline{a^n}$, & $a^{m-n} = a^{cn-n} = a^{n \times \overline{c-1}} = \overset{n}{P}\overline{\frac{a^c}{a}} = \overset{c-1}{P}\overline{a^n}$.

DE LA DIVISION.

260. Pour avoir le quotient de deux grandeurs exponentielles, il ne faut que diviser à l'ordinaire le dividende par le diviseur.

Ainsi pour diviser a^m par b^n, on écrira $\frac{a^m}{b^n}$; mais $\frac{a^m}{b^n} = a^m \times \frac{1}{b^n}$ $= a^m \times b^{-n}$; Donc $\frac{a^m}{b^n} = a^m b^{-n}$. On divisera donc une grandeur exponentielle par une autre grandeur exponentielle en écrivant le diviseur à la suite du dividende comme pour en marquer le produit & changeant le signe de l'exposant du diviseur : par conséquent

$$\frac{a^m}{b^n} = a^m b^{-n}, \quad \frac{a^m b^{-n}}{c^x} = a^m b^{-n} c^{-x}, \quad \frac{a^m}{c^x} = a^m c^{-x},$$

$$\frac{a^m c^{-x}}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{a^m c^{-x}}{n^{-1}} = a^m c^{-x} n.$$

Car la division par une fraction est une vraie multiplication.

261 Si l'opération a pour objet deux puiſſances quelconques d'une même grandeur, on ſouſtraira l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende, & le quotient ſera la même grandeur affectée de la différence des deux expoſans.

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\quad \frac{a^m}{a}=a^{m-1},\quad \frac{a^m}{a^2}=a^{m-2},\quad \frac{a^m}{a^{-n}}=a^{m+n},$$

$$\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q},\quad \frac{a^p}{a^{-q}}=a^{p+q},\quad \frac{a^{-p}}{a^q}=a^{-p-q},\quad \frac{a^{-p}}{a^{-q}}=a^{-p+q},$$

$$\frac{a^{\frac{p}{r}}}{a^{\frac{q}{s}}}=a^{\frac{p}{r}-\frac{q}{s}}=a^{\frac{ps-qr}{rs}},$$

L'expreſſion générale ſera donc $\frac{a^m}{a^{\pm n}}=a^{m\mp n}$.

1°. Si l'on ſuppoſe $n=m$, on aura $a^{m-n}=a^{m-m}=a^0=1$, & $a^{m+n}=a^{m+m}=a^{2m}=P\overline{a^m}=\overset{m}{P}\overline{a^2}$

2°. Si $n=cm$, ſi n eſt un multiple qui contienne c fois m, on aura $a^{m-n}=a^{m-cm}=a^{m\times\overline{1-c}}=\overset{m}{P}\overline{\frac{a}{a^c}}=\overset{1-c}{P}\overline{a^m}$, & au contraire $a^{m+n}=a^{m+cm}=a^{m\times\overline{c+1}}=\overset{m}{P}\overline{a^{c+1}}=\overset{c+1}{P}\overline{a^m}$.

3°. Si au contraire n eſt une aliquote contenue c fois dans m; c'eſt-à-dire ſi $m=cn$, on aura $a^{m-n}=a^{cn-n}=a^{n\times\overline{c-1}}=\overset{n}{P}\overline{\frac{a^c}{a}}=\overset{c-1}{P}\overline{a^n}$, & $a^{m+n}=a^{cn+n}=a^{n\times\overline{c+1}}=\overset{n}{P}\overline{a^{c+1}}=\overset{c+1}{P}\overline{a^n}$.

DE L'EXALTATION.

262 Pour élever une puiſſance quelconque a^m d'une grandeur a, à une autre puiſſance quelconque n, on multipliera l'expoſant de la puiſſance qu'on veut exalter par l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut l'exalter.

Ainsi les seconde, troisiéme, quatriéme, &c. puissances de a^{m}, seront a^{2m}, a^{3m}, a^{4m}, &c.
la puissance n de a^{m} sera a^{mn}, & a^{mp} sera la puissance du degré p de la grandeur a^{m}.

En élevant a^{m} aux puissances p, $-p$, $\frac{p}{q}$, $-\frac{p}{q}$,
on aura a^{mp}, a^{-mp}, $a^{\frac{mp}{q}}$, $a^{-\frac{mp}{q}}$,
élevant a^{-m} aux mêmes puissaeces, on aura a^{-mp}, a^{mp}, $a^{-\frac{mp}{q}}$, $a^{\frac{mp}{q}}$,
élevant $a^{\frac{m}{n}}$ aux mêmes puissances, on aura $a^{\frac{pm}{n}}$, $a^{-\frac{pm}{n}}$, $a^{\frac{pm}{nq}}$, $a^{-\frac{pm}{nq}}$,
élevant $a^{-\frac{m}{n}}$ aux mêmes puissances, on aura $a^{-\frac{pm}{n}}$, $a^{\frac{pm}{n}}$, $a^{-\frac{pm}{nq}}$, $a^{\frac{pm}{nq}}$,

263. Comme m & n peuvent représenter des quantités quelconques entieres ou fractionnaires, on aura donc en général
$\overset{\pm n}{P}\,\overline{a^{\pm m}} = a^{\pm mn}$.

1°. Si $n=m$, on aura $a^{+mn}=a^{mn}=a^{mm}$ (dont l'exposant sera le carré de m) $=\overset{m}{P}\,\overline{a^{m}}=\overset{mm}{P}\,\overline{a}$; & $a^{-mn}=a^{-mm}=\frac{1}{a^{mm}}=\overset{m}{P}\,\overline{\frac{1}{a^{m}}}=\overset{mm}{P}\,\overline{\frac{1}{a}}$.

2°. Si $n=cm$, c'est-à-dire, si n est un multiple de m & le contient c fois, on aura $a^{mn}=a^{m\times cm}=a^{cmm}=\overset{cmm}{P}\,\overline{a}=\overset{c}{P}\,\overline{a^{mm}}=\overset{cm}{P}\,\overline{a^{m}}=\overset{mm}{P}\,\overline{a^{c}}$,
& $a^{-mn}=a^{-cmm}=\frac{1}{a^{cmm}}=\overset{cmm}{P}\,\overline{\frac{1}{a}}=\overset{c}{P}\,\overline{\frac{1}{a^{mm}}}=\overset{cm}{P}\,\overline{\frac{1}{a^{m}}}=\overset{mm}{P}\,\overline{\frac{1}{a^{c}}}$.

3°. Si au contraire $m=cn$, c'est-à-dire, si n est une aliquote contenue c fois dans m, on aura $a^{mn}=a^{cnn}=\overset{cnn}{P}\,\overline{a}=\overset{c}{P}\,\overline{a^{nn}}=\overset{cn}{P}\,\overline{a^{n}}=\overset{nn}{P}\,\overline{a^{c}}$,
& $a^{-mn}=a^{-cnn}=\frac{1}{a^{cnn}}=\overset{cnn}{P}\,\overline{\frac{1}{a}}=\overset{c}{P}\,\overline{\frac{1}{a^{nn}}}=\overset{cn}{P}\,\overline{\frac{1}{a^{n}}}=\overset{nn}{P}\,\overline{\frac{1}{a^{c}}}$.

DE L'EXTRACTION.

264 Pour extraire la racine quelconque n d'une puissance quelconque m de la grandeur indéterminée a, il faut diviser son exposant m, par le degré n de la racine demandée; c'est-à-dire, que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Ainsi les racines secondes de	a^m,	a^{-m},	$a^{\frac{m}{n}}$,	$a^{-\frac{m}{n}}$;
seront	$a^{\frac{m}{2}}$,	$a^{-\frac{m}{2}}$,	$a^{\frac{m}{2n}}$,	$a^{-\frac{m}{2n}}$,
leurs racines troisiémes seront	$a^{\frac{m}{3}}$,	$a^{-\frac{m}{3}}$,	$a^{\frac{m}{3n}}$,	$a^{-\frac{m}{3n}}$,
leurs racines quatriémes seront	$a^{\frac{m}{4}}$,	$a^{-\frac{m}{4}}$,	$a^{\frac{m}{4n}}$,	$a^{-\frac{m}{4n}}$,
leurs racines du degré p seront	$a^{\frac{m}{p}}$,	$a^{-\frac{m}{p}}$,	$a^{\frac{m}{pn}}$,	$a^{-\frac{m}{pn}}$,
leurs racines du degré $-p$ seront	$a^{-\frac{m}{p}}$,	$a^{\frac{m}{p}}$,	$a^{-\frac{m}{pn}}$,	$a^{\frac{m}{pn}}$,
leurs racines du degré $\frac{p}{q}$ seront	$a^{\frac{mq}{p}}$,	$a^{-\frac{mq}{p}}$,	$a^{\frac{mq}{np}}$,	$a^{-\frac{mq}{np}}$,
leurs racines du degré $-\frac{p}{q}$ seront	$a^{-\frac{mq}{p}}$,	$a^{\frac{mq}{p}}$,	$a^{-\frac{mq}{np}}$,	$a^{\frac{mq}{np}}$,

C'est-à-dire, qu'en général on aura $\sqrt[\pm n]{a^{\pm m}} = a^{\pm\frac{n}{m}}$.

265 1°. Si $n = m$, $a^{+\frac{m}{n}}$ sera $= a^{+\frac{m}{m}} = a^{0+1} = a^1 = a$.

& $a^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{1}{1}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

2°. Si n est multiple de m, par exemple, si $n = cm$, on aura

$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{cm}} = a^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{a}$, & $a^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{cm}} = a^{-\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{\frac{1}{a}}$.

3°. Si au contraire n eſt aliquote de m, par exemple, ſi l'on a $n = \frac{m}{c}$ ou $cn = m$, on aura $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = a^{c}$,

& $a^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}} = a^{-c} = \frac{1}{a^{c}}$.

C'eſt-à-dire, que l'expreſſion $a^{\pm\frac{m}{n}}$ ne ſera commenſurable que dans les cas ſuivans,

1°. Si $n = m$, parce qu'alors on tirera la racine m d'une puiſſance parfaite a^{m} ou $\frac{1}{a^{m}}$ de même degré qui ſera a ou $\frac{1}{a}$.

2°. Si $n = cm$, & que a ſoit égal à la puiſſance c d'une grandeur quelconque b, par exemple $a = b^{c}$; parce qu'alors $a^{\frac{1}{c}} = b^{\frac{c}{c}} = b$, & $a^{-\frac{1}{c}} = b^{-\frac{c}{c}} = b^{-1} = \frac{1}{b}$.

3°. Enfin ſi $n = \frac{m}{c}$ ou que $cn = m$, parce qu'alors on pourra diviſer réellement l'expoſant $\pm m = \pm cn$ par $\pm n$, ce qui donnera a^{c} ou $\frac{1}{a^{c}}$.

REMARQUE.

On voit par ce qui précede (262. 263. 264. 265.) qu'il n'y a pas de différence entre l'opération d'élever une quantité quelconque à une puiſſance du degré $\pm n$, & celle d'en extraire la racine $\pm\frac{1}{n}$;

Car la puiſſance $\pm n$ de a eſt $a^{\pm n} = a^{n}$, ou $\frac{1}{a^{n}}$, & la racine $\pm\frac{1}{n}$ de la même quantité a ſera $\sqrt[\pm\frac{1}{n}]{a^{\pm 1}} = a^{n}$, ou $\frac{1}{a^{n}}$ (262.)

Réciproquement ſoit qu'on éleve la grandeur $a^{\pm 1}$ à une puiſſance fractionnaire $\pm\frac{1}{n}$ ſoit qu'on tire la racine du degré $\pm n$ de la même grandeur $a^{\pm 1}$, on aura toujours le même réſultat $a^{\pm\frac{1}{n}}$ (262.)

266 Par conſéquent la formule générale que l'on a vûe ci-devant (189.) pour élever un binome quelconque $\pm p \pm s$ à une puiſſance quelconque m qui peut repréſenter les quantités 2, 3, 4, &c... m, peut ſervir également pour les puiſſances $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c... $\frac{1}{n}$, c'eſt-à-dire que cette formule peut ſervir à l'extraction des racines auſſi bien qu'à l'élevation aux puiſſances.

On aura donc dans cette même formule générale d'exaltation, une formule pour extraire la racine carrée d'un binome quelconque $\pm p \pm s$ en ſuppoſant $m = \frac{1}{2}$.

En ſuppoſant $m = \frac{1}{3}$, elle ſervira de même pour extraire la racine cubique d'une quantité quelconque repréſentée par le binome $\pm p \pm s$.

Enfin la même formule ſervira pour extraire la racine quelconque du degré n de la quantité qu'on repréſentera par le binome $\pm p \pm s$ en ſuppoſant dans la formule $m = \frac{1}{n}$.

Mais comme on pourroit trouver quelques difficultés à faire la ſubſtitution néceſſaire de la fraction générale $\frac{1}{n}$ à la quantité entiere indéterminée m de la formule dont il s'agit (189); pour plus de commodité, nous transformerons cette formule générale d'exaltation, en une formule générale d'extraction, qui n'en differera qu'en ce que dans celle-ci nous ſuppoſerons $\frac{1}{n} = m$ de la premiere.

Donc pour extraire la racine du degré quelconque n d'une quantité $\pm p \pm s$ qui n'eſt pas une puiſſance parfaite du même degré, on pourra approcher à l'infini de la véritable valeur de la racine exacte impoſſible demandée, en ſe ſervant de la formule ou ſuite infinie ci-après dans laquelle on ſuppoſe que $\pm p$ repréſente la premiere partie de la puiſſance imparfaite propoſée, & que $\pm s$ en repréſente la ſeconde partie.

Par conſéquent ſi l'on demande la racine quelconque du degré n d'un polinome quelconque, on ſuppoſera ce polinome égal à $\pm p \pm s$, & on ſubſtituera aux p & aux s de la formule, leurs valeurs ſuppoſées; c'eſt-à-dire, en général que la racine du degré n de $\pm p \pm s$, ou

$$\sqrt[n]{\pm p \pm s} = p^{\frac{1}{n}} \pm \frac{1}{n} p^{\frac{1-n}{n}} s \pm \frac{1\times\overline{1-n}}{n\times 2n} p^{\frac{1-2n}{n}} s^2 \pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}}{n\times 2n\times 3n} p^{\frac{1-3n}{n}} s^3$$

$$\pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}\times\overline{1-3n}}{n\times 2n\times 3n\times 4n} p^{\frac{1-4n}{n}} s^4 \pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}\times\overline{1-3n}\times\overline{1-4n}}{n\times 2n\times 3n\times 4n\times 5n} p^{\frac{1-5n}{n}} s^5$$

$$\pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}\times\overline{1-3n}\times\overline{1-4n}\times\overline{1-5n}}{n\times 2n\times 3n\times 4n\times 5n\times 6n} p^{\frac{1-6n}{n}} s^6$$

$$\pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}\times\overline{1-3n}\times\overline{1-4n}\times\overline{1-5n}\times\overline{1-6n}}{n\times 2n\times 3n\times 4n\times 5n\times 6n\times 7n} p^{\frac{1-7n}{n}} s^7$$

$$\pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}\times\overline{1-3n}\times\overline{1-4n}\times\overline{1-5n}\times\overline{1-6n}\times\overline{1-7n}}{n\times 2n\times 3n\times 4n\times 5n\times 6n\times 7n\times 8n} p^{\frac{1-8n}{n}} s^8$$

$$\pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}\times\overline{1-3n}\times\overline{1-4n}\times\overline{1-5n}\times\overline{1-6n}\times\overline{1-7n}\times\overline{1-8n}}{n\times 2n\times 3n\times 4n\times 5n\times 6n\times 7n\times 8n\times 9n} p^{\frac{1-9n}{n}} s^9$$

$$\pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}\times\overline{1-3n}\times\overline{1-4n}\times\overline{1-5n}\times\overline{1-6n}\times\overline{1-7n}\times\overline{1-8n}\times\overline{1-9n}}{n\times 2n\times 3n\times 4n\times 5n\times 6n\times 7n\times 8n\times 9n\times 10n} p^{\frac{1-10n}{n}} s^{10}$$

$$\pm \frac{1\times\overline{1-n}\times\overline{1-2n}\times\overline{1-3n}\times\overline{1-4n}\times\overline{1-5n}\times\overline{1-6n}\times\overline{1-7n}\times\overline{1-8n}\times\overline{1-9n}\times\overline{1-10n}}{n\times 2n\times 3n\times 4n\times 5n\times 6n\times 7n\times 8n\times 9n\times 10n\times 11n} p^{\frac{1-11n}{n}} s^{11}$$

$\pm$ &c.

Fin du premier Volume & du Calcul.



TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE II.

Numéros | Pages

CHAPITRE III.

Chapitre IV.

Usage

CHAPITRE V.

Chapitre VI.

Fin de la Table des Matiéres.

EXTRAIT des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences, du 23. Juin 1751.

MESSIEURS CLAIRAULT ET DEPARCIEUX qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage intitulé *Eſſais ſur les Mathématiques expliqués & démontrés par* M. DIGARD, en aïant fait leur rapport; l'Académie a jugé que cet Ouvrage étoit d'autant plus digne de l'attention du Public, que l'Auteur avoit ſû le rendre intéreſſant en ſaiſiſſant toutes les occaſions de faire des remarques utiles, que les principes y étoient diſpoſés avec ordre & clairement expliqués, qu'on y trouvoit pluſieurs idées nouvelles, que les définitions y étoient juſtes & exactes, & qu'enfin le ſtile étoit auſſi coulant que le ſujet le pouvoit permettre. En foi dequoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris ce 7 Juillet 1751.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Sécretaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amez & féaux Conſeillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requetes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra: SALUT. Nos bien amés LES MEMBRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne ville de Paris, Nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilége pour l'impreſſion de leurs Ouvrages: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, Nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer, par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caractéres, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés il puiſſe en être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie. Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers

à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auſdits Expoſans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les expoſer en vente, les Manuſcrits ou Imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages, ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un en celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France; le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir leſdits Expoſans & leurs ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie des Préſentes qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez, feaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires; CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le dix-neuviéme jour du mois de Mars, l'an de grace mil ſept cent cinquante, & de notre Regne le trente-cinquiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

MOL.

Regiſtré ſur le Regiſtre XII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 430. fol. 309. conformément au Réglemens de 1723. qui fait défenſes, article 4. à toutes perſonnes, de quelque qualité qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement; à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre huit Exemplaires de chacun preſcrits par l'article 108. du même Réglement. A Paris le 5. Juin 1750.

Signé LE GRAS, *Syndic.*

On prie le Lecteur de corriger les fautes suivantes avant de faire usage de ce volume.

ERRATA.

Pages	*Lignes*	*Fautes*	*Corrections*
38	27	256000	25600
Ibid.	28	2560000	256000
39	7 Exemple II.	3260	3264
45.	4e. en remontant	N°. 29	39
56	12	$\times\ \overline{a-b}+$	$+\overline{a-b}\times$
Ibid.	37	connus	communs
57	8	$1a\times$	$1\times$
67	11	$a\ b^3c^3$	$a^3b^3c^3$
69	4e. en remontant	$-12y^2$	$-108y^2$
Ibid.	à la derniere	$-63y^2$	$-159y^2$
70	11	$-12y^2$	$-108y^2$
Ibid.	14	$-63y^2$	$-159y^2$
71	8	$-x^6y$	$+x^6y$
72	1	$+6p$	$+6p^3$
75	23	$\frac{3ab}{bcdc}$	$\frac{3ab}{bd}$
80	11	69	6g
Ibid.	Exemple III.	$+12a^2c^2$	$-12a^2c^2$
81	Exemple IV. 2e. ligne	$-ab$	$-ab^3$
Ibid.	Exemple V. 3e. ligne	$36z$	$36z^2$
Ibid.	Exemple VI. 1ere. ligne	$24x$	$24x^3$
Ibid.	au diviseur	$6x$	$6x^2$
Ibid.	3	$42x$	$42x^2$
83	Exemple XI. 1ere. ligne	$+s$	$+s^2$
96	7 la seconde fraction	$\frac{}{4}$	$\frac{9}{4}$
113	4	$4\frac{1}{2}=\frac{9}{}$	$4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$
117	4e. col. 11e. rang	$\frac{9}{35}$	$\frac{1}{35}$
Ibid.	Suite de la 4e. col. 3e. rang	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{35}$
120	de la Soustraction	N°. 221	122

